The copy filmed here has been reproduced thanks to the generosity of:

National Library of Canada

The images appearing here are the best quality possible considering the condition and legibility of the original copy and in keeping with the filming contract specifications.

Original copies in printed paper covers are filmed beginning with the front cover and ending on the last page with a printed or illustrated impression, or the back cover when appropriate. All other original copies are filmed beginning on the first page with a printed or illustrated impression, and ending on the last page with a printed or illustrated impression.

The last recorded frame on each microfiche shall contain the symbol ⟶ (meaning "CONTINUED"), or the symbol ▽ (meaning "END"), whichever applies.

Maps, plates, charts, etc., may be filmed at different reduction ratios. Those too large to be entirely included in one exposure are filmed beginning in the upper left hand corner, left to right and top to bottom, as many frames as required. The following diagrams illustrate the method:

L'exemplaire filmé fut reproduit grâce à la générosité de:

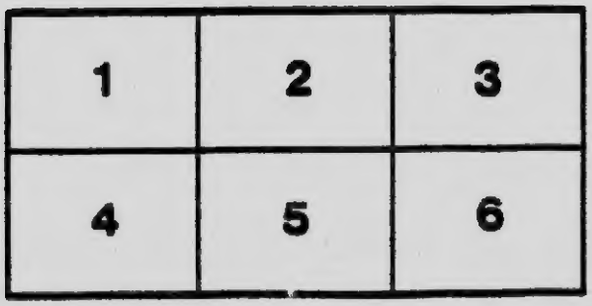
Bibliothèque nationale du Canada

Les images suivantes ont été reproduites avec le plus grand soin, compte tenu de la condition et de la netteté de l'exemplaire filmé, et en conformité avec les conditions du contrat de filmage.

Les exemplaires originaux dont la couverture en papier est imprimée sont filmés en commençant par le premier plat et en terminant soit par la dernière page qui comporte une empreinte d'impression ou d'illustration, soit par le second plat, selon le cas. Tous les autres exemplaires originaux sont filmés en commençant par la première page qui comporte une empreinte d'impression ou d'illustration et en terminant par la dernière page qui comporte une telle empreinte.

Un des symboles suivants apparaîtra sur la dernière image de chaque microfiche, selon le cas: le symbole ⟶ signifie "A SUIVRE", le symbole ▽ signifie "FIN".

Les cartes, planches, tableaux, etc., peuvent être filmés à des taux de réduction différents. Lorsque le document est trop grand pour être reproduit en un seul cliché, il est filmé à partir de l'angle supérieur gauche, de gauche à droite, et de haut en bas, en prenant le nombre d'images nécessaire. Les diagrammes suivants illustrent la méthode.



TRAITÉ
D'ARITHMÉTIQUE

A L'USAGE
DES CANDIDATS ET ÉLÈVES
AUX ÉCOLES SPÉCIALES

PAR

ALFRED FYEN

Professeur de Mathématiques
à
L'École Centrale de Préparation et d'Arpentage
de Québec,
Ancien élève de l'École Militaire de Belgique.

> Les théories générales se classent et se gravent plus facilement dans l'intelligence que la connaissance de tous les cas particuliers, en supposant même qu'aucun de ceux-ci n'ait été omis.
>
> (Lacroix).

PREMIÈRE ÉDITION

QA 106
F94

QUÉBEC
IMPRIMERIE DE "LA LIBRE PAROLE"

1907

TRAITÉ
D'ARITHMÉTIQUE

A L'USAGE
DES CANDIDATS ET ÉLÈVES
AUX ÉCOLES SPÉCIALES

PAR

ALFRED FYEN

Professeur de Mathématiques
à
L'École Centrale de Préparation et d'Arpentage
de Québec,
Ancien élève de l'Ecole Militaire de Belgique.

Les théories générales se classent et se gravent plus facilement dans l'intelligence que la connaissance de tous les cas particuliers, en supposant même qu'aucun de ceux-ci n'ait été omis

(LECOINTE).

PREMIÈRE ÉDITION

QUÉBEC
IMPRIMERIE DE "LA LIBRE PAROLE"

1907

QA106
F94

Enregistré, conformément à l'acte du Parlement du Canada en l'an mil neuf cent et sept.

Tous les exemplaires portent la signature de l'auteur.

DÉDIÉ

À

MONSEIGNEUR O. E. MATHIEU

RECTEUR DE

L'UNIVERSITÉ LAVAL DE QUÉBEC

TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE

CHAPITRE I.

DES NOMBRES ENTIERS.

§ 1.—Numération.

1. **L'arithmétique** est la science des nombres. Elle fait connaître leurs propriétés et nous donne la raison des procédés qu'on emploie pour les combiner entre eux.

2. On appelle **nombre**, la collection de plusieurs unités ou quantités *de même espèce* et égales entre elles. On peut encore dire qu'un nombre est l'expression du rapport d'une grandeur quelconque comparée à l'unité prise comme terme de comparaison.

3. On entend par **quantité** ou **grandeur**, tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution. Comparer une grandeur à l'unité prise comme terme de comparaison, c'est *mesurer* cette grandeur.

4. Un nombre est dit **concret**, quand il désigne l'espèce d'unité qu'il renferme : cinq *hommes* ; il est dit **abstrait**, quand il ne désigne par l'espèce d'unité qu'il renferme : cinq.

5. Les nombres concrets ou abstraits peuvent être **entiers**, **décimaux** ou **fractionnaires** : entiers, lorsqu'ils ne contiennent que des unités entières, comme dix pommes, quinze jours ; décimaux, lorsqu'ils contiennent, outre les entiers, des subdivisions décimales, comme cinq piastres cinquante centins.

6. Les nombres dits **complexes** sont des nombres dont le système de décomposition n'est pas décimal et dont les

subdivisions se rapportent à des unités différentes. **Exemple :** 10 jours, 5 heures, 17 minutes et 45 secondes.

7. L'arithmétique se divise en deux parties : la **numération** et le **calcul**.

8. La numération est la partie qui apprend à former, à écrire, à énoncer et à reproduire tous les nombres. De là, deux espèces de numération : la *numération parlée* et la *numération écrite*.

A.—Numération parlée.

9. La *numération parlée* est l'art d'énoncer tous les nombres à l'aide d'un nombre limité de mots.

10. On entend par **système de numération** parlée, l'ensemble des conventions que l'on a faites pour former le nom des nombres.

11. Voici comment on a procédé :

On a donné un nom particulier aux neuf premiers nombres : *un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf* que l'on a appelés **unités simples**.

En ajoutant une unité à neuf, on a appelé le nombre résultant *dix* formant l'unité de l'ordre des dizaines, et on a compté par dizaines, comme on avait compté par unités et l'on a dit : une dizaine, deux dizaines, trois dizaines..... neuf dizaines, que l'on a appelé *dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, septante* (plus communément appelé *soixante et dix*), *octante* (*quatre-vingt*), *nonante* (*quatre-vingt-dix*). Entre chaque dizaine, on a intercalé le nom des neuf premiers nombres, et on a ainsi formé tous les nombres jusque *nonante-neuf* ou *quatre-vingt-dix-neuf*.

On a obtenu ainsi :

Dix-un	que	l'on	a	appelé	*onze*
Dix-deux	"	"	"	"	*douze*
Dix-trois	"	"	"	"	*treize*
Dix-quatre	"	"	"	"	*quatorze*
Dix-cinq	"	"	"	"	*quinze*

Dix-six " " " " *seize*
Dix-sept, dix-huit, dix-neuf
(Vingt) *vingt-et-un*.....*vingt-neuf*
(Trente) *trente-et-un*.....*trente-neuf*
.....
(Nonante).....*nonante-neuf* (*quatre-vingt-dix-neuf*)

A ce dernier nombre, on a ajouté une unité et on a appelé ce nouveau nombre *cent* ou unité de 3e ordre.

On a compté par centaines, comme on avait compté par unités et dizaines, en disant : *cent, deux cents, trois cents*..... *neuf cents* entre lesquels on a intercalé les quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres, et on a obtenu ainsi tous les nombres jusque *neuf-cent-quatre-vingt-dix-neuf* Une unité, ajoutée à ce dernier nombre, a formé la classe des **mille** ou **unité de la deuxième classe.**

Cette deuxième classe a cté formée comme la classe des unités. dizaines et centaines d'unités simples et l'on a obtenu ainsi le nom de tous les nombres jusque *neuf-cent-quatre-dix-neuf-mille-neuf-cent-quatre-vingt-dix-neuf.*

Après la classe des mille, on a formé la 3e classe ou classe des **millions**, puis la classe des **billions** et ainsi de suite. Chacune de ces classes possède ses unités, dizaines et centaines.

12 Ce système a reçu le nom de **décimal** parce que le nom *dix* en est la base.

13. *Remarque.*—Une unité d'un ordre quelconque vaut dix, cent, mille.....unités d'un ordre inférieur, suivant que le premier occupe un, deux, trois.....rangs à gauche du second.

B.—Numération écrite.

14. La numération écrite est l'art de reproduire tous les nombres possibles au moyen de quelques caractères appelés **chiffres.**

15. Comme nous l'avons vu dans la numération parlée, la suite des nombres est illimitée ; il ne serait donc pas possible d'attribuer un signe particulier à chaque nombre. Pour simplifier la question, on a opéré pour la numération écrite comme on avait opéré pour la numération parlée et l'on a donné un caractère particulier aux neuf premiers nombres : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Pour former la première dizaine, on a employé un dizième caractère 0 (zéro) qui, par lui-même, n'a aucune valeur, mais qui permet, en égard à la remarque (13) de donner à chacun des chiffres une valeur dix, cent, mille.....fois plus grande, suivant le rang qu'il occupera, en plaçant à la droite un, deux, trois.....zéros, et qui permet de remplacer les unités des ordres qui viendraient à manquer.

16. Nous voyons donc, dès lors, qu'à chaque chiffre peuvent être attribuées deux valeurs :

1° **La valeur absolue** qui est celle que le chiffre acquiert lorsqu'il est considéré isolément, c'est-à-dire, celle que lui donne l'image qui le représente ;

2° **La valeur relative ou de position** qui est celle que le chiffre acquiert, en égard à la place qu'il occupe dans un nombre, en vertu de ce principe, qui est la base de tout notre système décimal : *un chiffre placé à la gauche d'un autre représente des unités d'un ordre dix fois supérieur à cet autre.*

Ainsi, pour représenter le nombre cinquante-deux, on écrit 52.

Le nombre six-cent-soixante-trois s'écrit 663.
" " sept-mille-quatre-cent-trente et-un s'écrit 7431.
Soixante-deux-millions-cinq-cent-et-sept s'écrit 62000507.

17. De ce qui précède sur la numération, on peut déduire les deux règles suivantes :

Règle I.—*Pour énoncer un nombre écrit en chiffres, on partage le nombre en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche ; et, commençant par la tranche de*

gauche, on énonce successivement chaque tranche comme si elle était seule, en y ajoutant le nom de la classe d'unité qui lui correspond.

Règle II.—*Pour écrire en chiffres un nombre énoncé, on écrit successivement, en allant de gauche à droite, les nombres des diverses classes d'unités, comme ils sont énoncés, en ayant soin de remplacer par des zéros les classes ou les unités des divers ordres qui viendraient à manquer.*

§ 2.—Calcul des nombres entiers.

18. Le calcul renferme un certain nombre d'opérations que nous rencontrerons dans le cours de cet ouvrage et parmi elles, il en est quatre qui servent de base à toutes les autres, et que, pour cette raison, on appelle *fondamentales* ; ce sont **l'addition, la soustraction, la multiplication, et la division.**

19. On appelle **théorème**, une propriété qui ne devient évidente qu'à la suite d'une démonstration.

20. La **définition** fait connaître le but que l'on se propose.

21. La **démonstration** est la suite des raisonnements que l'on doit faire pour arriver à mettre en lumière l'énoncé d'un théorème ou d'une définition.

22. La **Règle** est la conséquence de la démonstration ; c'est, en quelque sorte, la traduction en langage ordinaire des opérations effectuées pendant la démonstration pour arriver au but proposé.

23. L'**exemple** est l'application de la règle.

24. La **preuve** est une seconde opération, différente de la première, qui tend à en démontrer l'exactitude ou montrer qu'une erreur a été commise.

25. **Résoudre un problème**, c'est déterminer les nombres ou les inconnues au moyen des nombres connus.

A.—Addition.

26 **Définition.**—*L'addition est une opération qui a pour but de réunir plusieurs nombres en un seul appelé* **somme ou total.**

L'addition s'indique par le signe + (plus) que l'on place entre les nombres à additionner.

27. Il faut former un nombre appelé somme ou total qui renferme, à lui seul, autant d'unités des différents ordres qu'il y en a dans les nombres proposés.

Or, nous savons que nous ne pouvons comparer que des unités de même espèce, c'est-à-dire que nous ne pouvons pas former un tout avec des espèces différentes ; ainsi, par exemple, 5 pommes plus 6 poires, cela fait onze objets ; mais, on ne peut donner à ces objets la désignation de poires ou de pommes. Par analogie, on ne peut donc ajouter que des unités à des unités, des dizaines à des dizaines, et ainsi de suite.

28. D'où Règle.—*Pour additionner plusieurs nombres, il faut les écrire les uns en dessous des autres de manière que les unités d'un même ordre soient dans une même colonne verticale, souligner le dernier d'un trait horizontal pour le séparer du résultat ; additionner successivement, en commençant par la droite, les nombres contenus dans chaque colonne ; si la somme ne dépasse pas 9, on l'écrit telle qu'on l'a trouvée ; dans le cas contraire, elle contient des unités de l'ordre immédiatement supérieur que l'on reporte sur la colonne suivante, et ainsi de suite, pour toutes les colonnes jusque la dernière en dessous de laquelle on écrit la somme trouvée.*

Exemple : 452 + 347 + 563 + 613

452		452
347		347
563		563
613		563
15	Somme de la colonne des unités.	1975
16	" " " " dizaines.	
18	" " " " centaines.	
1975	Somme totale.	

29. Preuve de l'addition —*Pour faire la preuve de l'addition, on effectue la même opération de haut en bas, si on l'a commencée de bas en haut et réciproquement.* Le résultat doit être le même.

30. *Autre manière de faire la preuve.*—On peut séparer un ou plusieurs des nombres proposés et faire la somme des nombres restants, puis additionner avec cette somme la somme des nombres mis à part.

B.—Soustraction.

31. Définition.—*La soustraction est une opération qui a pour but, étant donnés deux nombres, d'en trouver un troisième appelé* **reste, excès** *ou* **différence** *qui, ajouté au plus petit, reproduit le plus grand.*

32. Règle I.—*Pour soustraire un nombre d'un seul chiffre d'un autre nombre, on retranche du plus grand successivement autant d'unités qu'il y a dans le plus petit.*

Exemple : $9-5=4$. En effet $9-1=8$; $8-1=7$; $7-1=6$; $6-1=5$; $5-1=4$.

33. Règle II —*Pour soustraire un nombre d'un autre, on écrit le plus petit en dessous du plus grand, en ayant soin que les unites d'un même ordre soient dans une même colonne verticale et l'on souligne le tout pour le séparer du résultat que l'on écrit en dessous. Ensuite, commençant par la première colonne de droite, on retranche le chiffre inférieur du chiffre supérieur correspondant, et l'on écrit le résultat en dessous de la colonne ; on opère successivement et de la même manière sur chaque colonne jusque la dernière colonne de gauche.*

Exemple : Soit à soustraire 524 de 786

$$\begin{array}{r} 786 \\ 524 \\ \hline \text{Reste } 262 \end{array}$$

34. Si le chiffre que l'on doit soustraire est plus grand que celui dont on doit le soustraire, l'opération semble impossible ; mais, dans ce cas on emprunte une unité à la colonne de l'ordre immédiatement supérieur qui vaut 10 unités de l'ordre de la colonne considérée.

EXEMPLE :	724	L'on dit : 6 de 4, cela ne se peut ;
	536	empruntant une unité à la colonne
	——	des dizaines qui vaut dix unités
Reste	133	simples, 10 et 4 = 14 unités ; 6 de

14, il reste 8 que l'on écrit sous la colonne des unités. Ayant emprunté 1 dizaine, il n'en reste plus qu'une au lieu de 2 et 8 dizaines de 1 dizaine cela ne se peut ; empruntant une unité à la colonne suivante des centaines qui vaut 10 dizaines, on dit 10 + 1 = 11 et 8 de 11 = 3. Passant à la colonne des centaines 5 de 6 = 1. Le reste est donc 138.

35. Preuve de la soustraction. — La preuve de la soustraction tire son procédé de la définition même de la soustraction. *Il faut que le reste ajouté au plus petit des deux nombres donnés reproduise le plus grand.*

Dans la soustraction précédente, le reste 138 + 586 = 724.

C.—MULTIPLICATION.

36. Définition.—*La multiplication est une opération par laquelle, étant donnés deux nombres, l'un appelé* **multiplicande** *et l'autre* **multiplicateur**, *il s'agit d'en former un troisième, appelé* **produit**, *qui soit formé avec le multiplicande comme le multiplicateur a été formé avec l'unité.*

Il suit de la définition même de la multiplication, que le *produit est de la même nature que le multiplicande*, puisqu'il n'est autre chose que le multiplicande répété un certain nombre de fois indiqué par le multiplicateur.

Le multiplicateur est donc toujours un nombre abstrait qui n'a d'utilité que de marquer combien de fois doit être répété le multiplicande.

37. Trois cas peuvent se présenter :

1° Multiplication d'un chiffre par un chiffre.
2° " de plusieurs chiffres par un chiffre
3° " " " chiffres par plusieurs chiffres.

38. *1er Cas.*—Soit à multiplier 7×3.

D'après la définition, le produit doit être formé avec le multiplicande 7 comme le multiplicateur 3 a été formé avec l'unité. Or, 3 a été formé en répétant l'unité 3 fois, donc le produit s'obtiendra en répétant le multiplicande 7, trois fois, c'est-à-dire $7 + 7 + 7 = 21$.

Les résultats de la multiplication des nombres de 1 chiffre pris deux à deux ont été réunis dans un tableau, qu'on appelle *table de multiplication* ou *table de Pythagore.*

39. *2e Cas.*—Soit à multiplier 734×4.

D'après la définition, le produit doit être formé avec 734 comme 4 a été formé avec l'unité. Or, répéter 4 fois le nombre 734, revient à prendre 4 fois les unités, 4 fois les dizaines, 4 fois les centaines et faire la somme de tous les résultats, en ayant soin de reporter sur les dizaines, celles obtenues par l'addition des unités ; sur les centaines celles obtenues par l'addition des dizaines, etc.

734	4×4 unités = 6 unités + 1 dizaine
4	4×3 dizaines = 12 dizaines = 2 dizaines + 1 centaine
	4×7 centaines = 18 centaines
2936	

Ce produit se compose donc de 6 unités, 3 dizaines et 29 centaines, c'est-à-dire 2936 unités.

40. Avant de démontrer le 3e cas, nous allons démontrer les principes suivants, sur lesquels est basée la démonstration du 3e cas.

41. Principe I.—*Dans un produit de deux ou plusieurs facteurs, on peut intervertir l'ordre des facteurs.*

En effet, je dis que $4 \times 3 = 3 \times 4$ Car :

$4 \times 3 = 4 + 4 + 4 = 12$ et

$3 \times 4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12.$

42. Principe II. — *Pour multiplier un nombre par un multiple ou une puissance quelconque de 10, il suffit de multiplier ce nombre par le chiffre significatif du multiple et d'ajouter à la droite du résultat autant de 0 que l'indique l'indice de la puissance.*

1° Soit à multiplier 73×10.

Cette opération indique qu'il faut rendre le nombre 73, dix fois plus grand, c'est-à-dire exprimer chacune de ses unités dans un ordre dix fois plus grand. Il suffit pour cela, en vertu du principe de la numération (16, 2°) de faire avancer chacun des chiffres d'un rang vers la gauche, ce qui se fait en écrivant un zéro à la droite du nombre. On obtient ainsi $73 \times 10 = 730$.

2° Soit à multiplier 73×600.

Or $600 = 6 \times 100 = 6 \times 10^2$ Donc $73 \times 600 = 73 \times 10^2 = 438 \times 10^2$.

Ce qui revient à rendre les unités de 438 cent fois plus grandes, c'est-à-dire les faire avancer de 2 rangs vers la gauche, ce qui se fait en écrivant 2 zéros à la droite du nombre considéré, donc 43800.

43. Principe III.—*Pour multiplier un nombre par une somme, il suffit de le multiplier par chacune des parties de la somme et de faire la somme des produits partiels.*

Soit à multiplier $(a \times b \times c)$ par m.

Je dis que $(a + b + c) \times m = a\,m + b\,m + c\,m$.

En effet : $(a + b + c) \times m = (a + b + c) + (a + b + c) + (a + b + c) \ldots\ldots$ le groupe $(a + b + c)$ étant répété m fois (définition de la multiplication). Or cette somme contient m fois le nombre a, m fois le nombre b, et m fois le nombre c, donc :

$(a + b + c)\,m = a + a + a \ldots + b + b + b \ldots + c + c + c \ldots$

d'où

$(a + b + c)\,m = m \times a + m \times b + m \times c$ et, comme on peut intervertir l'ordre des facteurs, il vient :

$(a + b \times c)\,m = a \times m + b \times m + c \times m$.

44. Reprenons le 3e Cas :

Soit à multiplier 7436 × 342.

Or 342 = (2 + 40 + 300) donc :

7436 × 342 = 7436 × (2 + 40 + 300)

= 7436 × 2 + 7436 × 40 + 7436 × 300

(Principe III).

Chacune des opérations indiquées dans le 2e membre de cette dernière égalité peut s'effectuer en vertu du 2e cas (39) et du principe II (42).

Or :

7436 × 2 est le produit du multiplicande par les unités du multiplicateur.

7436 × 40 est le produit du multiplicande par les dizaines du multiplicateur.

7436 × 300 est le produit du multiplicande par les centaines du multiplicateur.

D'où **Règle.**—*Pour multiplier un nombre de plusieurs chiffres par un nombre de plusieurs chiffres, il faut multplier le multiplicande par chacune des unités du muliplicateur et faire la somme des produit partiels obtenus.*

45. Preuve de la multiplication.—La preuve se fait par la multiplication des mêmes nombres, mais en renversant l'ordre des facteurs (41) Nous verrons plus loin ( ) la preuve de la multiplication par un nombre quelconque.

D.—Division.

46. Définition. — *La division est une opération par laquelle, étant donné le produit de 2 facteurs appelé* **dividende**, *et l'un des facteurs, appelé* **diviseur**, *on demande de trouver l'autre facteur, appelé* **quotient.**

47. Trois cas peuvent se présenter :

1er Cas.—Le diviseur n'a qu'un chiffre et le dividende ne dépasse pas 10 fois le diviseur.

2e Cas.—Le dividende et le diviseur sont des nombres quelconques, mais le dividende ne dépasse pas 10 fois le diviseur.

3e Cas—Le dividende et le diviseur sont des nombres quelconques et le dividende est plus grand que 10 fois le diviseur.

48. *1er Cas.*—Voir table de multiplication.

49. *2e Cas.*—Soit à diviser 440 par 55

Le dividende, étant le produit du diviseur par le quotient, le produit des dizaines du diviseur par les unités du quotient ne pourra se trouver que dans les dizaines du dividende. Donc, pour trouver le chiffre du quotient, il suffira de diviser les dizaines du dividende par les dizaines du diviseur, ce que nous pouvons faire en vertu du 1er cas de la division (48).

Nous trouverons ainsi le chiffre exact du quotient ou un chiffre trop fort ; car, le produit de ce chiffre par les dizaines du diviseur peut être augmenté par les dizaines qui auraient reflué de la multiplication des unités du diviseur par le quotient. Pour s'assurer de la chose, on multiplie le diviseur par le chiffre trouvé au quotient, et, si le produit peut se retrancher du dividende, c'est que le chiffre est bon ; si cela ne peut se faire, on le diminue successivement de une unité jusqu'à ce qu'on obtienne un produit qui puisse se soustraire du dividende et donner un reste plus petit que le diviseur ou un reste nul.

```
440 | 55
440 |---
----  8
  0
```

50. *3e Cas.*—Soit à diviser 86750 par 235.

La première chose à faire est de rechercher quelle est l'espèce de la plus haute unité du quotient et ensuite quelle sera cette unité. Or le dividende est le produit du diviseur par le quotient ; donc en multipliant 235 par les unités du quotient, il faut reproduire le dividende.

Mais $235 \times 1 < 86750$ donc le quotient contient des unités.
$235 \times 10 < 86750$ " " " " des dizaines.
$235 \times 100 < 86750$ " " " " des centaines.
$235 \times 1000 > 86750$ " " " ne contient pas d'unité de mille.

L'espèce des plus hautes unités du quotient est donc déterminé et sera des centaines.

Or, le produit du diviseur par les centaines du quotient, est un nombre exact de centaines qui ne peut se trouver que dans les centaines du dividende.

Pour trouver ce chiffre des centaines du quotient, il suffit évidemment, de diviser les 867 centaines du dividende par les 235 unités du diviseur. Opération qui peut se faire en vertu du 2e cas de la division.

Cette opération donne le chiffre exact du quotient ou un chiffre trop fort. Pour s'en assurer, on effectue le produit qui doit pouvoir se soustraire des centaines du dividende. Dans le cas contraire, on diminue le quotient progressivement de une unité jusqu'à ce que le produit soit égal ou inférieur au dividende.

86750	235
70500	369
16250	
14100	
2150	
2115	
35	

Le reste 16250 contient le produit du diviseur par les dizaines et unités du quotient. Or, le produit du diviseur par les dizaines du quotient étant un nombre exact de dizaines, ne peut se trouver que dans les 1625 dizaines du nouveau dividende. Pour trouver ce chiffre, il suffit de diviser les 1625 dizaines par 235, ce qui donne le chiffre exact des dizaines du quotient ou un chiffre trop fort. On s'assure, par le procédé cité plus haut, de l'exactitude de ce chiffre.

On trouve ainsi un nouveau reste ou dividende partiel 2150 qui ne renferme plus que le produit du diviseur par les unités du quotient. Cette dernière opération se fait par les procédés du 2e cas.

D'où **Règle.**—*Pour diviser deux nombres entiers l'un par l'autre, on écrit le diviseur à droite du dividende dont on le sépare par un trait vertical et l'on souligne le diviseur pour le séparer du quotient que l'on écrit en dessous.*

Cela fait, on sépare par un point, sur la gauche du dividende, autant de chiffres qu'il y en a dans le diviseur ou un de plus, si le nombre résultant est plus petit que le diviseur ; ce qui donne le premier dividende partiel que l'on divise par le diviseur : on obtient ainsi le premier chiffre du quotient et l'on soustrait le produit du dividende partiel.

A la droite du reste ainsi obtenu, on écrit le chiffre suivant du dividende, ce qui donne un second dividende partiel sur lequel on opère comme sur le premier, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ait abaissé successivement tous les chiffres du dividende.

La suite de tous les chiffres obtenus au quotient forme le quotient cherché.

51. Le produit du diviseur par les unités du quotient peut être égal au dernier dividende partiel ou lui être inférieur.

Dans le premier cas, la division se fait exactement sans laisser de reste ; dans le second cas, la division laisse un reste.

On peut donc écrire, d'une façon générale, en appelant D le dividende, d le diviseur, Q le quotient et R le reste :

$$D = d \times Q + R$$

formule générale, dans laquelle R peut être égal ou différent de séro, mais toujours plus petit que d.

52. S'il arrive qu'après avoir abaissé un chiffre du dividende à la suite du reste, on obtienne un dividende partiel moindre que le diviseur, on écrit 0 au quotient ; on abaisse le chiffre suivant du dividende à la droite du dividende partiel précédent et l'on continue l'opération avec le nouveau dividende partiel.

53. Théorème I.—*Dans toute division, si on augmente ou diminue le dividende sans toucher au diviseur, le quotient devient plus grand ou plus petit.*

En effet, le nombre à partager étant devenu plus grand ou plus petit, chacune des parties exprimées par le quotient sera devenue plus grande ou plus petite.

54 Théorème II.—*Dans toute division, si on augmente ou diminue le diviseur sans toucher au dividende, le quotient devient plus petit ou plus grand.*

En effet, le nombre de parties que l'on doit faire devenant plus grand ou plus petit, chacune des parties deviendra plus petite ou plus grande.

55. Théorème III.—*Le quotient de deux nombres ne change pas si on multiplie ou si on divise à la fois le dividende et le diviseur par un même nombre.*

Soient A le dividende, B le diviseur et Q le quotient.

D'après la définition de la division et la formule générale (51), on peut écrire $A = B \times Q$.

Multiplions les deux nombres de cette égalité par un nombre quelconque m, il vient :

$$A \times m = B \times Q \times m \qquad \text{ou}$$
$$A \times m = B \times m \times Q$$

Et on voit que le quotient Q n'a pas changé.

Autrement : En multipliant par m le dividende sans toucher au diviseur, on rend le quotient m fois plus grand (53) ; en multipliant le diviseur par m, sans toucher au dividende, on rend le quotient m fois plus petit ; donc le quotient, ayant été rendu m fois plus grand, puis m fois plus petit, n'a pas changé de valeur.

56. Théorème IV.—*Si on multiplie ou qu'on divise le dividende par un nombre, le quotient et le reste (s'il y en a) sont multipliés par ce nombre.*

Soit $D = dQ + R$

Multiplions les deux membres par un nombre m, il vient :

$$D\,m = (dQ + R)\,m$$

et en vertu de (43) $D\,m = dQ \times m + R\,m$ ou

$$D\,m = d \times Q.m + R\,m \qquad \text{c. q. f. d.}$$

57. Théorème V.—*Si on multiplie ou qu'on divise à la fois le dividende et le diviseur par un même nombre, le*

quotient ne change pas, mais le reste est multiplié par ce nombre.

Soit $D = dQ + R$

$$Dm = (dQ + R)m = dQ \times m + Rm$$

et en vertu de (41) $Dm = d.m \times Q + R.m$

Ce qui démontre le théorème.

58. Théorème VI.—*On n'altère pas le reste de la division de deux nombres en supprimant dans le dividende un multiple exact du diviseur.*

Soit $A = BQ + R$ (1)

Supposons que A contienne un multiple $m.B$ du diviseur B. Retranchons ce multiple des deux membres de l'égalité (1), il vient :

$$A - mB = BQ + R - mB \quad \text{ou}$$
$$A - mB = B(Q - m) + R$$

Ce qui démontre le théorème.

59. Le théorème III permet de simplifier la division dans le cas où le dividende et le diviseur sont tous deux terminés par des zéros.

Règle.—*Lorsque le dividende et le diviseur sont terminés par des zéros, on suprrime sur la droite de chacun d'eux le même nombre de zéros, autant que dans celui qui en a le moins, et l'on procède à l'opération sur les deux nombres résultants.*

60. Preuve de la division —La preuve de la division se fait en multipliant le diviseur par le quotient ou réciproquement et en ajoutant le reste au produit. Le résultat doit reproduire le dividende.

Nota.—Nous retrouverons plus loin la preuve de la division par un nombre quelconque.

60*bis*. Quotient de deux nombres avec une approximation donnée.

Lorsque deux nombres ne sont pas exactement divisibles l'un par l'autre, on appelle quotient approché de ces deux nombres, à moins de $\frac{a}{b}$ près, le plus grand multiple de $\frac{a}{b}$ qui multiplié par le diviseur, donne un produit inférieur au dividende.

I. Soit à chercher le quotient de 453 par 23 à $\frac{1}{1000}$ près ($\frac{a}{b} = \frac{1}{1000}$).

D'après la définition, nous devons trouver le plus grand nombre de millièmes qui, multiplié par 23 reproduise un produit inférieur à 453.

Soient x et $(x+1)$ les deux nombres consécutifs de millièmes entre lesquels est compris le quotient cherché ; on aura donc :

$$\frac{x}{1000} \times 23 \leqq 453 < \frac{x+1}{1000} \times 23$$

Le signe $\leqq$ se dit "*plus petit ou égal*".

En réduisant au même dénominateur :

$$x \times 23 \leqq 453000 < (x+1)\,23$$

Et, si nous considérons le quotient par défaut, nous pouvons écrire : $x \times 23 = 453000$ ou

$$x = \frac{453000}{23}$$

c'est-à-dire trouver le quotient par défaut à une unité près de 453000 par 23 ou 19647, et alors

$$\frac{x}{1000} = \frac{19647}{1000} = 19{,}647$$

Donc pour trouver le quotient de deux nombres à $\frac{1}{1000}$ près, par exemple, on écrit trois zéros à la droite du dividende et on effectue la division des deux nombres ainsi modifiés. On aura soin de rendre le quotient obtenu 1000 fois plus petit (53).

II. Trouver le quotient de 453 par 23 à moins de $\frac{1}{8}$ près. Nous devons trouver le plus grand nombre de fois $\frac{1}{8}$ qui

multiplié par 23 donne un nombre inférieur à 453. Soient x et $(x+1)$ les deux nombres consécutifs de $\frac{1}{5}$ entre lesquels est compris le quotient cherché. On aura :

$$\tfrac{4}{5}x \times 23 \leqq 453 < \tfrac{4}{5}(x+1) \times 23$$

$$\frac{4x \times 23}{5} \leqq 453 < \frac{4(x+1)}{5} \times 23$$

$$4x \times 23 \leqq 453 \times 5 < 4(x+1) \times 23$$

$$x \times 23 \leqq 453 \times \tfrac{5}{4} < (x+1) \times 23 \quad \text{et enfin}$$

$$x \leqq \frac{453 \times \frac{5}{4}}{23} < (x+1)$$

ce qui veut dire qu'il faut chercher le quotient à une unité près de $\frac{453 \times 5}{4}$ ou de $\frac{2265}{4}$ par 23 ; quotient qui est évidemment le même que celui de la partie entière de 564 par 23. Or, ce quotient est 24 à 1 unité près.

Donc $x = 24$ et par suite

$$\frac{4x}{5} = \frac{4 \times 24}{5} = 19\tfrac{1}{5}$$

CHAPITRE II.

§ 1.—DIVISIBILITÉ DES NOMBRES.

CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ.

61. On appelle **diviseur exact** ou **diviseur** d'un nombre tout nombre qui le divise exactement.

62. On appelle **nombre premier absolu** ou **nombre premier** tout nombre qui n'a d'autre diviseur que lui-même ou l'unité.

63. La Recherche des caractères de divisibilité est basée sur les principes suivants :

64. Principe I. — *Tout nombre qui divise exactement deux ou plusieurs nombres divise exactement leur somme ou leur différence.*

Soient 2 nombres A et B exactement divisibles par le nombre m. Je dis que $(A \pm B)$ est divisible par m.

En effet, puisque m divise A et B, on peut écrire

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{A}{m} = Q \\ \dfrac{B}{m} = Q' \end{array}\right\} \text{ d'où } \begin{array}{l} A = mQ \\ B = mQ' \end{array}$$

Et ajoutant membre à membre, il vient :

$$A + B = mQ + mQ' = m(Q + Q') \quad \text{d'où}$$

$$\frac{A + B}{m} = Q + Q' = \text{nombre entier}$$

De même $\dfrac{A - B}{m} = Q - Q' = \text{nombre entier}$

Ce qui montre que $\dfrac{A \pm B}{m} = \text{nombre entier.}$

65. Principe II.—*Tout nombre qui en divise un autre divise tous les multiples de cet autre.*

Si d divise A, je dis qu'il divise mA.

En effet, $mA = A + A + A \ldots\ldots\ldots\ldots$ répété m fois

divisant les 2 membres par d, il vient

$$\frac{mA}{d} = \frac{A + A + A + \ldots\ldots\ldots}{d}$$

Or d divise A, donc d divise la somme $A + A + A \ldots\ldots$ c'est-à-dire m A.

66. Principe III.—*Le reste de la division d'un tout, composé de deux parties, par un nombre, est le même que celui de la partie qui n'est pas divisible par ce nombre.*

En effet, soit $N = A + B$

et supposons que la partie A soit divisible par d et que B ne le soit pas ; on aura :

$$A = dQ$$
$$B = dQ' + R \qquad \text{d'où}$$
$$A + B = dQ + dQ' + R = d(Q + Q') + R \qquad \text{donc}$$
$$N = d(Q + Q') + R$$

et l'on voit que le reste R de la division de N par d est le même que celui de la division de B par d.

67. Théorème.—*Tout nombre qui n'est pas premier admet un facteur premier.*

Soit N un nombre qui n'est pas premier, c'est-à-dire admettant d'autres facteurs que N et 1.

Soit a le plus petit des diviseurs de N. Je dis que a est premier.

En effet, si a n'est pas premier, il admet un diviseur qui nécessairement sera plus petit que lui. Mais ce diviseur de a est aussi diviseur de N, ce qui est contre l'hypothèse, puisque nous avons supposé que a est le plus petit. Donc a est premier.

68. Théorème. — *La suite des nombres premiers est illimitée.*

Supposons qu'on ait découvert un certain nombre de nombres premiers, et soient 1, 2, 3, 5, 7, 11 et 13, ces

nombres. Admettons pour un instant qu'il n'y ait pas d'autres nombres premiers que ceux-là. En effectuant le produit P de ces différents facteurs il vient :

$$P = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$$

Si (P + 1) est premier, c'est qu'il existe un nombre premier plus grand que 13 ; si (P + 1) n'est pas premier, il admet un facteur premier (67).

Je dis que ce facteur premier est différent de ceux considérés dans le produit P.

En effet, si ce facteur était parmi ceux de P il diviserait à la fois (P + 1) et P et par suite leur différence (P + 1 — P) c'est-à-dire 1, ce qui est impossible ; donc le diviseur premier de (P + 1) est supérieur à 13, ce qu'il fallait démontrer.

69. Pour former la table des nombres premiers, on écrit à la suite des deux nombres 1 et 2, la suite des nombres impairs 3, 5, 7, 9, 11, 13.....etc. On supprime, dans cette suite, tous les facteurs de 3, ce qui se fait en barrant tous les nombres de 3 en 3 à partir de 3 ; puis, à partir de 5, tous les nombres de 5 en 5 ; et ainsi de suite. Les nombres restants sont des nombres qui ne sont divisibles que par eux-mêmes ou l'unité ; donc ils sont premiers.

70. Théorie générale de la recherche des caractères de divisibilité des nombres quelconques par des diviseurs quelconques.

Soit N un nombre quelconque et considérons qu'on ait partagé ce nombre, en allant de droite à gauche, en tranches de m chiffres chacune, la tranche de gauche pouvant avoir 1, 2,....(m —) chiffres ; et soient, toujours en allant de droite à gauche, A, B, C, D.....ces tranches considérées comme autant de nombres isolés.

Nous aurons :

$$N = A + B \times 10^m + C \times 10^{2m} + D \times 10^{3m} + \ldots \quad (1)$$

représentant le nombre décomposé en tranches de m chiffres. L'égalité (1) peut se mettre sous les formes suivantes :

1ère Forme.

$$N = 10^m (B + C \times 10^m + D + 10^{2m} + \ldots.) + A$$

Ajoutant et retranchant au 2e membre de (1).

$B + C + D + \ldots\ldots$ il vient :

$$(2)\ N = A + B \times 10^m + C \times 10^{2m} + D \times 10^{3m} + \ldots.$$
$$+ B - B + C - C + D - D + \ldots.$$

et alors : $N = [B(10^m - 1) + C(10^{2m} - 1) + \ldots.]$
$+ (A + B + C + \ldots.)$ **(2e Forme)**

L'égalité (2) peut s'écrire aussi :

$$N = [B(10^m + 1) + C(10^m + 1) + D(10^{3m} + 1) \ldots.]$$
$$+ (A - B + C - D + \ldots.) \qquad \textbf{(3e Forme)}$$

71. 1ère Forme.

$$N = 10^m (B + C \times 10^m + D \times 10^{2m} \ldots.) + A$$

La première partie est divisible par 10^m ou par un facteur de 10^m, donc :

1° *Le reste de la division d'un nombre par un diviseur quelconque de la* m*e puissance de la base, est le même que que le reste que l'on obtient en divisant par ce diviseur la première tranche de* m *chiffres à droite.*

72. 2e Forme.

$$N = [B(10^m - 1) + C(10^{2m} - 1) + (D\,10^{3m} - 1) + \ldots] +$$
$$(A + B + C + \ldots.)$$

La 1ère partie du 2e membre est divisible par $(10^m - 1)$ ou par un facteur de $(10^m - 1)$. En effet :

$(10^m - 1)$ est divisible par $(10^m - 1)$ donc $10^m = (10^m - 1) +$

d'où multipliant par 10^m, il vient :

$10^{2m} = (10^m - 1)\,10^m + 10^m = (10^m - 1)\,10^m + (10^m - 1) + 1$

et enfin

$10^{2m} - 1 = (10^m - 1)\,10^m + (10^m - 1)$ divisible par $(10^m + 1)$

De même

$$10^{3m} = 10^{2m} \times 10^m = \{(10^m - 1)\,10^m + (10^m - 1) + 1\}\,10^m$$
$$10^{3m} = (10^m - 1)\,10^{2m} + (10^m - 1)\,10^m + 10^m$$
$$10^{3m} = (10^m - 1)\,10^{2m} + (10^m - 1)\,10^m + (10^m - 1) + 1$$

d'où $10^{3m} - 1 = (10^m - 1)\,10^{2m} + (10^m - 1)\,10^m + (10^m - 1)$ nombre indivisible par $(10^m - 1)$ et ainsi de suite. Donc

2° *Le reste de la division d'un nombre par un diviseur quelconque de la* m^e *puissance de la base, diminuée de une unité, est le même que celui que l'on obtient en divisant la somme des tranches de m chiffres par ce diviseur.*

73. 3e Forme.

$$N = [B(10^m - 1) + C(10^{2m} - 1) + D(10^{3m} + 1) + \ldots] + (A - B + C - D + \ldots)$$

On démontrera comme ci-dessus (72 que la 1ère partie du 2e membre est divisible par $(10^m + 1)$. Donc :

3° *Le reste de la division d'un nombre par un diviseur quelconque de la* m^e *puissance de la base, augmentée de une unité, est le même que celui que l'on obtient en divisant par ce facteur la différence entre la somme des tranches de* m *chiffres de rangs impairs et la somme des tranches de* m *chiffres de rangs pairs.*

74. Théorème.—*Le reste de la division par D d'un produit de deux facteurs $A \times B$ est le même que celui de la division par D du produit des restes $R' \times R''$ obtenus en divisant séparément A et B par D.*

Soient
$$A = DQ + R'$$
et
$$B = DQ' + R''$$

Formons le produit $A \times B = (DQ + R')(DQ' + R'')$
$$= D^2QQ' + DQR'' + DQ'R' + R'R''$$

D'où
$$\frac{A \times B}{D} = \frac{D^2QQ' + DQR'' + DQ'R' + R'R''}{D}$$

Les restes obtenus dans les 2 membres de cette égalité doivent être égaux. Or les 3 premiers termes du numérateur du 2d membre sont divisibles par D ; donc le reste de $\frac{A \times B}{D}$ sera le même que la partie $R'R''$ par D (67).

Ce théorème sert de base à la preuve de la multiplication et de la division par un nombre quelconque.

75. Divisibilité par 2.—*Tout nombre est divisible par 2 lorsque son dernier chiffre de droite est un chiffre pair.*

a) Application de la 1ère forme du théorème général.

2 est un diviseur de 10^1 (1ère puissance de 10)

Donc dans la règle (71), $m = 1$; d'où

Tout nombre est divisible par 2 lorsque la 1ère tranche de droite de 1 chiffre est divisible par 2 ; le reste que l'on obtient est le même que celui de cette tranche de 1 chiffre par 2.

b) Soit un nombre $254 = 25 \times 10 + 4$

La 1ère partie de la somme (25×10) est divisible par 2 ; donc le nombre lui-même sera divisible par 2 si l'autre partie de la somme l'est (principe 1er).

Donc si le chiffre de droite est pair le nombre est divisible par 2.

76. Divisibilité par 5.—*Tout nombre est divisible par 5, lorsqu'il est terminé par un zéro ou un 5.*

a) Application de la 1e forme de la théorie générale (71)

5 est facteur de 10^1 ; donc $m = 1$

Il faut donc que la tranche de droite de 1 chiffre soit divisible par 5.

b) Soit un nombre $540 = 54 \times 10$: divisible par 5 (principe I).

Soit $545 = 54 \times 10 + 5$

Or 54×10 est divisible par 5 (principe I) Donc $54 \times 10 + 5$ ou 545 sera divisible par 5 si la deuxième partie de la somme est divisible par 5 (principe II).

77. Divisibilité par 4 ou 25.—*Tout nombre est divisible par 4 ou 25, lorsque le nombre formé par les deux derniers chiffres de droite est divisible par 4 ou 25.*

a) Application de la 1e forme.

4 et 25 sont diviseurs de 10^2 ; donc $m = 2$ (71)

Il faut donc que la tranche formée par les 2 chiffres de droite soit divisible par 4 ou 25.

b) Soit $636 = 6 \times 100 + 36$

La 1e partie de la somme (6×100) est divisible par 4.

Donc le nombre sera divisible par 4, si la 2e partie de la somme est divisible.

Soit $675 = 6 \times 100 + 75$

6×100 est divisible par 25 ; donc 675 le sera si 75 est divisible par 25.

78 Divisibilité par 8 ou 125.—*Tout nombre est divisible par 8 ou 125, si le nombre formé par les trois chiffres de droite est divisible par 8 ou 125.*

Application de la 1e forme (71)

8 et 125 sont diviseurs de 1000 ou 10^3 ; donc $m = 3$

Il faut donc que la tranche formée par les 3 chiffres de droite soit divisible par 8 ou 125.

79. Divisibilité par 9.—*Tout nombre est divisible par 9, lorsque la somme de ses chiffres considérés comme unités simples est un nombre divisible par 9.*

a) Application de la 2e forme (72)

9 est diviseur de $(10^1 - 1)$, donc $m = 1$

Il faut donc que la somme des chiffres considérés comme unités simples soit divisible par 9.

b) Soit un nombre $79452 = 2 + 50 + 400 + 9000 + 70000$

$$\text{Or} \quad \left.\begin{array}{r} 1 = m\,9 + 1 \\ 10 = m\,9 + 1 \\ 100 = m\,9 + 1 \\ 1000 = m\,9 + 1 \\ 10000 = m\,9 + 1 \end{array}\right\} \text{d'où} \quad \begin{array}{r} 2 = m.9 + 2 \\ 50 = m\,9 + 5 \\ 400 = m\,9 + 4 \\ 9000 = m\,9 + 9 \\ 70000 = m\,9 + 7 \end{array} \text{ et ajoutant il vient}$$

$$79452 = m\,9 + (2 + 5 + 4 + 9 + 7)$$

Or : $m.9$ est divisible par 9 ; donc 79452 sera divisible par 9 si la 2de partie $(2 + 5 + 4 + 9 + 7)$ de la somme est divisible par 9. Ce qui démontre la règle.

80. *Preuve de la multiplication par 9.*

Application du N° 74.

Vérifier la multiplication $7653 \times 427 = 3267831$

Reste de 3267831 par $9 = 3$

$$\left.\begin{array}{l} R' = \text{reste de } 7653 \text{ par } 9 = 3 \\ R'' = \text{reste de } 427 \text{ par } 9 = 4 \end{array}\right\} \text{Reste de } R' \times R'' \text{ ou } 3 \times 4 \text{ par } 9 = 3$$

81. *Preuve de la division par 9.*

Vérifier $3267831 \div 7653 = 427$

Nous savons que $D = d \times Q$ donc

$3267831 = 7653 \times 427$ et on retombe sur la preuve par 9 de la multiplication.

82. Le même calcul s'applique à un diviseur quelconque.

83 Divisibilité par 3 —*Tout nombre est divisible par 3, lorsque la somme de ses chiffres considérés comme unités simples est divisible par 3.*

84. Divisibilité par 11.—*Tout nombre est divisible par 11, lorsque l'excès de la somme des chiffres de rangs impairs sur la somme des chiffres de rangs pairs est 0 ou un nombre divisible par 11.*

a) Application de la 3e forme de la théorie générale (**73**). 11 est un diviseur de $(10^1 + 1)$ donc $m = 1$.

b) Soit le nombre $79541 = 1 + 40 + 500 + 9000 + 70000$

$$\text{Or}\quad \left.\begin{array}{r} 1 = m.11 + 1 \\ 10 = m\,11 - 1 \\ 100 = m\,11 + 1 \\ 1000 = m\,11 - 1 \\ 10000 = m\,11 + 1 \end{array}\right\} \text{d'où}\quad \begin{array}{r} 1 = m.11 + 1 \\ 40 = m.11 - 4 \\ 500 = m\,11 + 5 \\ 9000 = m\,11 - 9 \\ 10000 = m\,11 + 7 \end{array}$$

et ajoutant, il vient :

$$79541 = m.11 + (1 - 4 + 5 - 9 + 7)$$

Or $(m.11)$ est divisible par 11, donc 79541 le sera si la 2e partie de la somme $(1 - 4 + 5 - 9 + 7)$ est divisible par 11. Ce qui démontre la règle.

85 Divisibilité par 7 et 13 —*Tout nombre est divisible par 7 ou 13 lorsque l'excès de la somme des tranches de 3 chiffres de rangs impairs sur la somme des tranches de 3 chiffres de rangs pairs est divisible par 7 ou 13.*

a) Application de la 3e forme.

7 et 13 sont des diviseurs de $(10^3 + 1)$; donc $m = 3$

b) Soit le nombre

$$79645324 = 324 + 645 \times 1000 + 79 \times 100000$$

$$\text{Or}\quad \left.\begin{array}{r} 1 = m\,7 + 1 \\ 1000 = m\,7 - 1 \\ 1000000 = m\,7 + 1 \end{array}\right\} \text{d'où}\quad \begin{array}{r} 324 = m\,7 + 324 \\ 645000 = m\,7 - 645 \\ 79000000 = m\,7 + 79 \\ \hline 79645324 = m\,7 + (324 - 643 + 79) \end{array}$$

ajoutant, il vient :

Or, la première partie de la somme est divisible par 7.

Donc, le nombre lui-même sera divisible par 7 si la 2de partie l'est, ce qui démontre l'énoncé.

86 Les caractères de divisibilité permettent de décomposer un nombre en ses facteurs premiers.

87. Les caractères de divisibilité seront employés plus loin dans la simplification des fractions ; ils nous permettent de découvrir aisément par quels nombres les 2 termes d'une fraction peuvent être divisibles à la fois.

§ 2.—Théorie de la recherche du plus grand commun diviseur.

88. La Théorie de la recherche du P. G. C. D. est basée sur les deux principes énoncés dans la recherche des caractères de divisibilité.

1er Principe.—Tout nombre qui en divise deux autres divise leur somme ou leur différence.

2e Principe.—Tout nombre qui en divise un autre, divise les multiples de cet autre.

89. Théorie générale.

Soient A et B deux nombres dont il faut chercher le p. g. c. d.

Si B divise A ce sera le p. g. c d. cherché ; opérons donc la division de A par B ; soit Q le quotient et R le reste. On a donc

$$A = BQ + R$$

B n'est donc pas donc pas le p. g. c. d.

Je dis que le p. g. c. d. entre A et B est le même que celui entre B et R. En effet, tout diviseur de A et B est diviseur de A et BQ (principe II) ; et tout diviseur de A et BQ est diviseur de leur différence $A - BQ$ (principe I) c'est-à-dire R.

Divisons donc B par R et soit

$$B = RQ' + R'$$

Tout diviseur de B et R est diviseur de B et RQ', donc diviseur de $B - RQ'$ c'est-à-dire de R' et ainsi de suite.

On obtient donc la suite des opérations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} A = BQ + R \\ B = BQ' + R' \\ R = R'Q'' + R'' \\ R' = R''Q''' \end{array}\right\}$$

R'' divisant exactement R'. Je dis que R'' est le plus grand commun diviseur cherché.

En effet, le p. g. c. d. doit diviser A et B, donc *A* et *BQ*, donc aussi $A - BQ = R$; divisant B et R, il divise B et RQ', donc $B - RQ' = R'$; Divisant B et R' il divise R et $R'Q''$, donc $R - R'Q'' = R''$.

D'un autre côté, R'' divisant R' et R'' divise $(R'Q'' + R'') = R$; divisant R et R', il divise $RQ' + R'$, c'est-à-dire B ; et divisant B et R, il divise $(BQ + R)$ c'est-à-dire A.

Donc R'', divisant A et B, ne peut être plus grand que le plus grand commun diviseur entre ces deux nombres.

R'' ne pouvant être, ni plus petit, ni plus grand que le plus grand commun diviseur, lui est égal.

90. Règle.—*Pour trouver le p. g c. d. entre deux nombres, on divise le plus grand par le plus petit ; si cette opération ne donne pas de reste, le plus petit nombre est le p. g. c d. cherché. Dans le cas contraire, on divise le plus petit nombre par le 1er reste, le 1er reste par le second, et ainsi de suite jusqu'à ce que la division se fasse exactement. Le dernier diviseur est le p. g. c. d. cherché.*

Ces opérations sont établies comme ci-dessous.

Exemple : à rechercher le p. g. c. d. entre 1574 et 192

	8	5	19
1574	192	38	2
38	2	0	

2 est le p. g. c. d. cherché.

91. Simplifications.—1° On peut, à un moment quelconque de l'opération, retrancher du plus grand nombre un multiple exact du plus petit. (**58**).

2° On peut à un moment quelconque de l'opération et sans altérer la valeur du p. g c. d. supprimer dans un reste un facteur premier avec le diviseur.

En effet, le facteur étant premier avec l'un des deux nombres, ne pourra faire partie des facteurs communs qui doivent composer le p. g. c. d

92. Procédé pour restreindre le nombre des divisions et limiter le nombre des opérations.

On peut toujours, dans une quelconque des divisions précédentes, supposer le reste plus petit que le $\frac{1}{2}$ diviseur, en prenant le quotient entier par défaut ou par excès et que le p. g. c. d. n'est pas altéré par la forme négative que prend un reste.

Cela posé, soit n le nombre de divisions qu'il a fallu faire pour obtenir le p. g. c. d. entre A et B. On a :

$$\left.\begin{array}{l} A = BQ + R \\ B = RQ' + R' \\ R = R'Q'' + R'' \\ \dots\dots\dots\dots \\ R_{n-2} = R_{n-1}Q_n + R_n \\ R_{n-1} = R_nQ_n \end{array}\right\} \text{Avec les conditions : (1)} \left\{\begin{array}{l} 2R \leq B \\ 2R' \leq R \\ 2R'' \leq R' \\ \dots\dots \\ 2R_n \leq R_{n-1} \end{array}\right.$$

D'où multipliant membre à membre les égalités (1) il vient :
$2R \times 2R' \times 2R'' \times \dots 2R_n \leq B \times R \times R' \times R'' \dots R_{n-1}$ d'où

$$\frac{2R \times 2R' \times 2R'' \times \dots 2R_n}{R \times R' \times R'' \dots R_{n-1}} \leq B \qquad \text{ou}$$

$2^n R_n \leq B$ (2) Or, le plus grand nombre d'opérations que l'on peut avoir à faire lors de la recherche du p. g. c. d. est donné lorsqu'on arrive à un reste $R_n = 1$ (cas ou les deux nombres sont premiers entre eux) alors (2) devient : $2^n \leq R_n$

C'est-à-dire que l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever 2 pour obtenir B ou un nombre immédiatement plus petit, est la limite supérieure du nombre des opérations à effectuer.

93. Théorème.—*Tout nombre qui en divise deux autres divise leur P. G. C. D.*

Soit m un nombre divisant A et B et soit D leur p. g. c. d. Je dis que m divise D.

En effet, la recherche du p. g. c. d. donne les égalités suivantes : $\left.\begin{array}{l} A=BQ+R \\ B=RQ'+D \\ R=DQ'' \end{array}\right\}$ Or m divisant A et B, divise A et BQ donc A — BQ c'est-à-dire R ; divisant B et R, il divise B et RQ' donc B — RQ' c'est-à-dire D. C. q. f. d.

94 Deux nombres sont dits **premiers entre eux** lorsqu'ils ont pour plus grand commun diviseur l'unité.

95. Théorème.—*Tout nombre qui divise un produit de deux facteurs $A \times B$ et qui est premier avec l'un d'eux A, divise l'autre B.*

Soit D un nombre divisant le produit $A \times B$ et premier avec A. Je dis qu'il divise B.

En effet D et A sont premiers entre eux, ils ont donc pour p. g. c. d. l'unité et on a :

$$\left.\begin{array}{l} A=DQ+R \\ D=RQ'+R' \\ \dots\dots\dots\dots \\ R_n=R_{n+1}Q_{n+2}+1 \end{array}\right\} \text{d'où multipliant par B, il vient} \left\{\begin{array}{l} AB=DQB+RB \\ DB=RQ'B+R'B \\ \dots\dots\dots\dots \\ R_nB=R_{n+1}Q_{n+2}B+B \end{array}\right.$$

Or D divise AB par hypothèse et $D \times QB$ qui est un multiple de D. Donc, en vertu de (**92**), il divise leur p g. c. d. B. C. q. f. d.

96. Théorème.—*Tout nombre premier P qui divise un produit A. B. C. D divise l'un des facteurs de ce produit.*

En effet, si P ne divise pas A, par exemple, c'est qu'il est premier avec A, et alors, il divise l'autre facteur $B \times C \times D$; s'il ne divise pas B, il divise l'autre facteur $C \times D$ du produit $B \times C \times D$; enfin, divisant le produit $C \times D$, il doit diviser l'un des facteurs C ou D (**95**).

97. *Décomposer un nombre en ses facteurs premiers,* c'est déterminer les nombres premiers qui divisent le nombre proposé et combien de fois chacun d'eux y entre comme facteur.

On opère cette décomposition en divisant le nombre donné autant de fois qu'il est possible par chacun des nombres premiers, jusqu'à ce que l'on arrive à un dernier quotient qui soit lui-même un nombre premier.

EXEMPLE :

1260	2
630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

Les facteurs premiers sont donc : 2, 3, 5, 7.

2 y entre 2 fois
3 " " 3 "
5 " " 1 "
7 " " 1 "

et alors $1260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

98. Théorème.—*Un nombre ne peut être décomposé en ses facteurs premiers que d'une seule manière.*

Supposons qu'on puisse décomposer un nombre P de 2 manières différentes et soient

$P = a \times b \times c \times d$ et $P = a' \times b' \times c' \times d'$

On a identiquement $a \times b \times c \times d = a' \times b' \times c' \times d'$

Mais alors a divisant $a \times b \times c \times d$ doit diviser le 2e membre $a' \times b' \times c' \times d'$, donc il doit diviser l'un des facteurs (96).

Or, comme tous les facteurs sont premiers, il faut que l'un d'eux soit égal à a.

Soit $a' = a$; alors il vient

$$b \times c \times d = b' \times c' \times d'$$

On prouverait de même que b' doit être $= b$
c' " " $= c$
d' " " $= d$

99. Théorème —*Un nombre divisible par plusieurs autres premiers entre eux 2 à 2, est divisible par leur produit.*

Soit P un nombre divisible par plusieurs autres a, b, c premiers entre eux.

P étant divisible par a donne $P = aQ$ (1) en appelant Q le quotient.

Or b divise P donc aussi son égal aQ ; et, comme il est premier avec a il doit diviser Q et l'on a : $Q = bQ'$ d'où $P = aQ = abQ'$ en remplaçant Q par sa valeur.

De même c divise P donc aussi abQ' et, comme il est premier avec a et b, et doit diviser Q' et l'on a : $Q' = cQ''$

D'où enfin

$$P = abQ' = abc \times Q'' \quad \text{et}$$

$$\frac{P}{abc} = Q''$$

ce qui montre que $a \times b \times c$ divise P

100 Recherche du p. g. c. d. entre plusieurs nombres.

Soient A, B, C, E les nombres proposés.

Soit D le p. g. c. d. entre A et B
D' " " D et C
D' " " D' et E

Je dis que D'' est le p. g. c. d cherché.

En effet, le p. g. c. d. cherché divise A et B, donc aussi leur p. g. c. d. D ; divisant D et C, il divisera aussi leur p. g. c d. D' et enfin étant diviseur de D' et E il est diviseur de leur p. g. c. d. D''.

Donc $\frac{D''}{\text{p. g. c d.}}$ = nombre entier (1)

D'un autre côté D'' divise E et D'. Or D' est le p. g. c. d. entre D et C, donc D'' divise D et C

D'' divisant D divise A et B puisque D est leur p. g. c. d.

Donc puisque D'' divise A, B, C et E, il doit diviser leur p. g. c. d. et on peut donc écrire :

$$\frac{\text{P. g. c. d.}}{D''} = \text{nombre entier} \quad (2)$$

Les égalités (1) et (2) exigent nécessairement que

$$D'' = \text{p g. c. d.} \qquad \text{D'où}$$

Règle.—*Pour trouver le p. g. c. d entre plusieurs nombres, on cherche le p. g. c d. entre les 2 plus grands, puis le p. g. c. d. entre le p. g. c. d. trouvé et le 3e nombre, et ainsi de suite. Le dernier p. g. c. d. est le p. g. c. d. cherché.*

101. Recherche du p. g. c. d. par la décomposition en facteurs.—On décompose les nombres en leurs facteurs premiers, et l'on forme un produit composé de tous les facteurs premiers communs aux différents nombres et affectés de l'exposant le plus faible.

Il est évident que le nombre ainsi formé est diviseur de tous les nombres proposés, car il contient des facteurs de chacun d'eux ; de plus, il est le plus grand, car s'il contenait un facteur commun affecté d'un exposant supérieur à celui qui en a le moins, il ne pourrait plus diviser celui-ci. (1)

Exemple : Chercher le p. g. c. d. entre 140, 1260, 2100.

140	2	1260	2	2100	2
70	2	630	2	1050	2
35	5	315	3	525	3
7	7	105	3	175	5
1		35	5	35	5
		7	7	7	7
		1		1	

$$\left.\begin{aligned} 140 &= 2^2 \times 5 \times 7 \\ 1260 &= 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \\ 2100 &= 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7 \end{aligned}\right\}$$

Le p. g. c. d. est donc $2^2 \times 5 \times 7 = 140$

§ 3.—Du plus petit commun multiple.

102. On entend par **plus petit commun multiple** entre plusieurs nombres, le plus petit nombre qui est divisible exactement par chacun des nombres donnés.

103. *Pour former le p. p. c. m. entre plusieurs nombres,* il faut les décomposer en leurs facteurs premiers et former un produit composé de tous les facteurs différents et y entrant autant de fois que celui des nombres qui en contient le plus de cette espèce, c'est à-dire que chaque facteur doit entrer dans le produit avec l'exposant le plus élevé.

Il est évident que le nombre ainsi formé est multiple de chacun des nombres donnés, car il contient tous les facteurs premiers de chacun d'eux ; de plus, il est le plus petit multiple ; car on ne pourrait supprimer un seul de ces facteurs sans qu'il cessât d'être divisible par celui des nombres qui en contient le plus de cette espèce. (1)

(1) Voir les conditions de possibilité de la division d'un monôme par un monôme en algèbre.

Soit à chercher le p. p. c. m. entre 315, 60, 40, 36.

315	3	60	2	40	2	36	2
105	3	30	2	20	2	18	2
35	5	15	3	10	2	9	3
7	7	5	5	5	5	3	3
1		1		1		1	

$$315 = 3^2 \times 5 \times 7$$
$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$
$$40 = 2^3 \times 5$$
$$26 = 2^2 \times 3^2$$

Le p. p. c. m. $= 3^2 \times 2^3 \times 5 \times 7 = 2520$.

104. Recherche du p p c. m. de 2 nombres à l'aide du p g. c. d.

Le p. p. c. m. de 2 nombres est égal au quotient du produit de ces deux nombres par leur p. g. c. d.

Soient A et B deux nombres et D leur p. g. c. d.

On a $\left.\begin{array}{l} A = DQ \\ B = DQ' \end{array}\right\}$ Q et Q' étant premiers entre eux.

Soient Am un multiple de A et
Bm' " " B on aura

$$Am = mDQ \quad \text{et} \quad Bm' = m'DQ'$$

Pour que le multiple soit commun aux deux nombres, il faut que

$$mDQ = m'DQ' \quad (1) \quad \text{ou}$$
$$mQ = m'Q'$$

Or, Q divise mQ, donc aussi $m'Q'$; et, comme il est premier avec Q, il doit diviser m'

Donc $m' = QK$ K étant le quotient de m' par Q.

Remplaçant m' par sa valeur dans (1), il vient :

$$mDQ = QKDQ' \quad (2)$$

valeur d'un multiple quelconque de A et B qui devient en y remplaçant Q et Q' par leurs valeurs $\frac{A}{B}$ et $\frac{B}{D}$

$$QKDQ' = \frac{A}{D} \times K \times D \times \frac{B}{D} = \frac{AB}{D} \times K \quad (3)$$

Le commun multiple (3) deviendra le plus petit commun multiple en donnant à K la plus petite valeur, c'est-à-dire 1, et alors (3) devient

$$\text{p. p. c. m.} = \frac{AB}{D}$$

Ce qui démontre l'énoncé.

CHAPITRE III.

DES FRACTIONS.

§ 1.—Fractions ordinaires.

A) Numération des fractions ordinaires.

105. On appelle **fraction ordinaire** ou simplement fraction une ou plusieurs parties de l'unité divisée en parties égales.

106. On représente une fraction à l'aide de deux nombres, écrits l'un en dessous de l'autre et séparés par un trait horizontal. Le nombre écrit en dessous indique en combien de parties on a divisé l'unité : il s'appelle le **dénominateur** ; le nombre écrit au-dessus indique combien on a pris de parties : il s'appelle le **numérateur.**

Ces deux nombres s'appellent les **termes** de la fraction. Ainsi, par exemple, dans $\frac{3}{7}$ on a divisé l'unité en 7 parties et on a pris 3 de ces parties.

107. On énonce une fraction ordinaire en énonçant d'abord le numérateur puis le dénominateur que l'on fait suivre de la terminaison *ième*, à l'exception de

$\frac{1}{2}$ qui s'énonce *un demi*

$\frac{1}{3}$ " " *un tiers*

$\frac{1}{4}$ " " *un quart*

Dans l'exemple ci-dessus la fraction s'énonce *trois-septième.*

108 Il suit de la nature même des fractions que :

1° De 2 fractions qui ont le même dénominateur, celle-là est la plus grande qui a le plus grand numérateur ;

2° De 2 fractions qui ont le même numerateur, la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur.

109. Toute expression, dans laquelle le numérateur est plus petit que le dénominateur, est plus petite que l'unité et se nomme **fraction ordinaire.**

Toute expression, dans laquelle le numérateur est plus grand que le dénominateur, est plus grande que l'unité et se nomme **nombre fractionnaire**. Ce nombre contient des unités entières.

110. Règle.—*Pour extraire les unités entières contenues dans un nombre fractionnaire, il suffit de diviser le numérateur par le dénominateur ; s'il y a un reste, ce dernier s'indique sous forme de fraction, ayant pour numérateur le reste et pour dénominateur le diviseur.*

EXEMPLE : $\frac{45}{5} = 9$ et $\frac{37}{9} = 4\frac{1}{9}$

111. Réciproquement *pour convertir des quantités entières accompagnées de fractions en nombre fractionnaire, on multiplie la partie entière par le dénominateur de la fraction, on ajoute à ce produit le numérateur et l'on donne au résultat le dénominateur de la fraction.*

EXEMPLE : $5\frac{4}{9} = 5 + \frac{4}{9}$ Or 5 unités valent $\frac{5 \times 9}{9} = \frac{45}{9}$

Donc $5 + \frac{4}{9} = \frac{45}{9} + \frac{4}{9} = \frac{49}{9}$

112. Théorème I.—*Une fraction proprement dite devient plus grande ou plus petite quand on augmente ou qu'on diminue les deux termes d'un même nombre.*

Si, aux 2 termes de la fraction $\frac{5}{8}$, on ajoute un même nombre 3, par exemple, on obtient la fraction $\frac{5+3}{8+3} = \frac{8}{11}$

Je dis que $\frac{8}{11}$ est plus grande que $\frac{5}{8}$. Comparer les deux fractions $\frac{5}{8}$ et $\frac{8}{11}$, c'est les comparer à l'unité. Or à la fraction $\frac{5}{8}$ il manque $\frac{3}{8}$ pour faire 1 unité et à la fraction $\frac{8}{11}$ il manque $\frac{3}{11}$ pour faire 1 unité.

Or $\frac{3}{11}$ est plus petit que $\frac{3}{8}$ (**108, 2°**).

Il s'ensuit que la fraction $\frac{3}{11}$ se rapproche plus de l'unité que la fraction $\frac{5}{8}$. Donc $\frac{8}{11}$ est plus grand que $\frac{5}{8}$, car une

fraction est d'autant plus grande qu'elle se rapproche plus de l'unité.

On démontrerait de même que $\frac{5}{8}$ est plus grand que $\frac{5-3}{8-3} = \frac{2}{5}$.

113. Théorème II.—*On rend une fraction un certain nombre de fois plus grande quand on multiplie son numérateur par ce nombre sans toucher au dénominateur, ou bien quand on divise le dénominateur sans toucher au numérateur.*

Soit en effet, la fraction $\frac{4}{5}$. Si je multiplie le numérateur par 3, par exemple, j'obtiens $\frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5}$

Je dis que $\frac{12}{5}$ est 3 fois plus grand que $\frac{4}{5}$

En effet, de deux fractions qui ont le même dénominateur, la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur (108, 1°).

De même, si je divise le dénominateur de la fraction $\frac{5}{12}$ par 2 j'obtiens $\frac{5}{6}$ qui est deux fois plus petite que $\frac{5}{12}$ (108, 2°).

114. Théorème III.—*On rend une fraction un certain nombre de fois plus petite, quand on divise son numérateur ou quand on multiplie son dénominateur par ce nombre sans toucher à l'autre terme.*

Même démonstration que 113.

115. Théorème VI.—*On ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant ou en divisant ses deux termes par un même nombre.*

1° Soit le facteur $\frac{a}{b} = q$ (1)

q étant entier ou fractionnaire D'où :

$$a = bq$$

Multiplions les deux membres par m il vient :

$$a\,m = b\,m\,q \qquad \text{d'où :}$$

$$\frac{a\,m}{b\,m} = q \qquad (2) \qquad \text{De (1) et (2) on tire}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a\,m}{b\,m}$$

2° Soit $\frac{A}{B} = q$ q étant entier ou fractionnaire et supposons que $A = a\,m$ et $B = b\,m$; il vient :

$$\frac{A}{B} = \frac{a\,m}{b\,m} = q \qquad (1) \qquad \text{d'où} \quad a\,m = b\,m\,q = b\,q.\,m$$

et divisant les 2 membres par m il vient :

$$a = b\,q \quad \text{d'où} \quad \frac{a}{b} = q \quad (2) \qquad \text{De (1) et (2) on tire}$$

$$\frac{a\,m}{b\,m} = \frac{a}{b}$$

116 Pour effectuer les différentes opérations sur les fractions, et spécialement ce qui concerne l'addition, la soustraction et l'appréciation de leurs grandeurs relatives, il faut pouvoir, en vertu de la définition des nombres et de la numération, comparer des quantités de même espèce. On est ainsi amené à chercher à ramener toutes les fractions, sur lesquelles on doit opérer, au même dénominateur, c'est-à-dire à la même espèce.

117. La réduction des fractions au même dénominateur est donc une opération qui a pour but de changer les fractions proposées en d'autres fractions équivalentes et qui aient toutes un dénominateur commun.

118. Règle I.—*Pour réduire deux fractions au même dénominateur, on multiplie les 2 termes de la 1ère par le dénominateur de la 2nde et les 2 termes de la 2nde par le dénominateur de la 1ère.*

Soient $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{5}$ à réduire au même dénominateur.

La fraction $\frac{2}{3}$ est équivalente à $\frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}$

La fraction $\frac{4}{5}$ " " " $\frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \frac{12}{15}$

119. Règle II.—*Pour réduire un nombre quelconque de fractions au même dénominateur, on multiplie les 2 termes*

de chacune d'elles par le produit des dénominateurs des autres.

Soit à réduire $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ et $\frac{5}{6}$

$$\frac{1\times3\times4\times6}{2\times3\times4\times6},\ \frac{2\times2\times4\times6}{3\times2\times4\times6},\ \frac{3\times2\times3\times6}{4\times2\times3\times6},\ \text{et}\ \frac{5\times2\times3\times4}{6\times2\times3\times4}$$

$$\frac{72}{144},\ \frac{96}{144},\ \frac{108}{144}\ \text{et}\ \frac{125}{144}$$

120. Règle III.—*Pour réduire plusieurs fractions au même dénominateur, on forme le plus petit commun multiple de tous les dénominateurs ; puis on multiplie les 2 termes de chaque fraction par le quotient obtenu en divisant le p. p. c. m. par le dénominateur de la fraction considérée.*

Soit à réduire au même dénominateur

$$\frac{5}{36},\ \frac{9}{40},\ \frac{7}{60}\ \text{et}\ \frac{17}{315}$$

$$\left.\begin{array}{l} 36 = 2^2 \times 3^2 \\ 40 = 2^3 \times 5 \\ 60 = 2^2 \times 3 \times 5 \\ 315 = 3^2 \times 5 \times 7 \end{array}\right\}\ \text{P. p. c. m.} = 2520 \ \text{divisé par :}\ \left\{\begin{array}{l} 36 = 2\times5\times7 \\ 40 = 3^2 \times 5 \\ 60 = 2\times3\times7 \\ 315 = 2^3 \end{array}\right.$$

D'où

$$\frac{5}{36} = \frac{5\times2\times5\times7}{p.\ p.\ c.\ m.} = \frac{250}{2520}$$

$$\frac{9}{40} = \frac{9\times13\times3^2\times7}{p.\ p.\ c.\ m.} = \frac{567}{2520}$$

$$\frac{7}{60} = \frac{7\times2\times3\times7}{p.\ p.\ c.\ m.} = \frac{294}{2520}$$

$$\frac{17}{315} = \frac{17\times2^1}{p.\ p.\ c.\ m.} = \frac{136}{2520}$$

121. Simplification des fractions.

Simplifier une fraction, c'est la transformer en une autre équivalente, mais dont les termes soient moins grands, afin de se faire une idée plus nette de la fraction d'unité qu'elle représente.

122. Règle.—*Pour simplifier une fraction, on divise les 2 termes par un même nombre qui les divise exactement ; on opère de la même façon sur le résultat de cette opération*

jusqu'à ce que les 2 termes n'aient plus de diviseur commun.

123. Les caractères de divisibilité nous permettent de découvrir la suite des nombres par lesquels il faut diviser les 2 termes de la fraction ; la théorie de la recherche du p. g. c. d. nous permet de trouver directement le nombre le plus grand par lequel il faut diviser les 2 termes de la fraction pour la transformer en une fraction équivalente à termes premiers entre eux.

124. Une fraction, ainsi simplifiée, est dite *réduite à sa plus simple expression* et la fraction ainsi obtenue est appelée *fraction irréductible.*

Soit la fraction $\frac{740}{1295}$. Si je cherche le p. g. c. d entre 1295 et 740, je trouve 185. Divisant les 2 termes par 185, j'obtiens $\frac{740 : 185}{1295 : 185} = \frac{4}{7}$ fraction irréductible.

125. Théorème. — *Toute fraction irréductible a ses 2 termes premiers entre eux.*

En effet, si les 2 termes ne sont premiers entre eux, ils ont un facteur commun et la fraction est alors réductible, ce qui est contre l'hypothèse.

126. Réciproquement, *toute fraction dont les termes sont premiers entre eux est irréductible.*

Soit $\frac{a}{b}$ une telle fraction et soit $\frac{c}{d}$ une fraction équivalente.

On a alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ d'où $c = \frac{ad}{b}$

Or b est premier avec a, donc b divise d et on a $d = bq$ et alors $c = \frac{abq}{b} = aq$

Donc $\frac{c}{d} = \frac{aq}{bq}$ c'est-à-dire que les 2 termes de la seconde fraction doivent être le même multiple des termes homologues de la 1ère. Donc celle-ci ne peut être réduite en termes plus simples.

127 Théorème.—*Deux fractions irréductibles égales ont leurs termes homologues identiques.*

Soit la fraction irréductible $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$

On en déduit $\left.\begin{array}{l} a = cq \\ b = dq \end{array}\right\}$ (1)

Mais on a, d'un autre côté, la fraction irréductible $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

D'où $\left.\begin{array}{l} c = aq' \\ d = bq' \end{array}\right\}$ (2)

D'où combinant (1) et (2) il vient : c

$$a \times d = c \times b$$

Remplaçant a et d par leur valeur, il vient :

$$cq \times bq' = cb \quad \text{d'où} \quad qq' = 1$$

Ce qui montre que $q = q' = 1$ et par suite

$$a = c \quad \text{et} \quad b = d$$ c. q. f. d.

B) Calcul des fractions ordinaires.

I.—Addition des fractions ordinaires.

128. Règle.—*Pour additionner 2 ou plusieurs fractions ordinaires, on les réduit au même dénominateur, si elles ne le sont pas déjà ; puis, on fait la somme de tous les numérateurs, et on donne, comme dénominateur à cette somme, le dénominateur commun.*

1°) Soit $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{1+2+3+4}{5} = \frac{10}{5} = 2$

2°) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6}$ Réduisons au même dénominateur par la règle III il vient :

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{6}{12} + \frac{8}{12} + \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{32}{12} = 2\frac{8}{12} = 2\frac{3}{4}$$

129. Pour additionner entre eux des nombres entiers accompagnés de fractions, on fait la somme de toutes les fractions ; on en extrait les entiers, s'il y a lieu, que l'on ajoute à la somme des parties entières que l'on fait séparément.

Soit $2\frac{3}{4} + 3\frac{4}{5} + 6\frac{2}{3} + \frac{5}{6}$

$$\frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{45 + 48 + 40 + 50}{60} = \frac{183}{60} = 3\frac{1}{20}$$

$$2 + 3 + 6 = 11 \quad \text{Donc } 11 + 3\frac{1}{20} = 14\frac{1}{20}$$

On peut encore convertir les nombres fractionnaires en fractions et faire l'addition par le procédé ordinaire.

II.—Soustraction des fractions ordinaires.

130. Règle.—*Pour soustraire une fraction d'une autre fraction, on les réduit au même dénominateur ; on retranche le plus petit numérateur du plus grand et l'on donne au reste le dénominateur commun.*

1°) Soit $\frac{16}{51} - \frac{7}{51} = \frac{16 - 7}{51} = \frac{9}{51} = \frac{3}{17}$

2°) $\frac{3}{4} - \frac{8}{15} = \frac{45 - 32}{60} = \frac{13}{60}$

131. Pour soustraire un nombre entier, accompagné d'une fraction, d'un nombre entier, accompagné d'une fraction, on commence par soustraire les fractions entre elles ; puis on fait la soustraction des nombres entiers, en tenant compte de la modification qui aurait pu être opérée si la fraction qui accompagne le plus petit nombre entier est plus grande que celle qui accompagne le plus grand nombre entier.

1°) $7\frac{3}{4} - 4\frac{8}{15} = \left(7 - 4\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{8}{15}\right) = 3 + \frac{13}{60} = 3\frac{13}{60}$

2°) $7\frac{8}{15} - 4\frac{3}{4}$ or $7\frac{8}{15} = 6\frac{23}{15}$ et alors

$$6\frac{23}{15} - 4\frac{3}{4} = \left(6 - 4\right) + \left(\frac{23}{15} - \frac{3}{4}\right) = 2 + \frac{92 - 45}{60} = 2\frac{47}{60}$$

On peut encore réduire les 2 nombres fractionnaires en fractions et opérer suivant la règle générale : le calcul est plus long.

III.—Multiplication des fractions.

132. Règle.—*Pour multiplier une fraction par un nombre entier, on multiplie le numérateur par ce nombre*

sans toucher au dénominateur ; ou bien, on divise le dénominateur sans toucher au numérateur.

Cette règle est la conséquence immédiate du théorème II sur la numération des fractions ordinaires.

133. Règle.—*Pour multiplier un nombre entier par une fraction, on multiplie l'entier par le numérateur de la fraction et l'on donne au produit le dénominateur de la fraction.*

Soit à multiplier $4 \times \frac{3}{5}$. Il faut, en vertu de la définition de la multiplication, former un produit qui soit composé avec le multiplicande comme le multiplicateur a été formé avec l'unité.

Or le multiplicateur $\frac{3}{5}$ a été formé en prenant 3 fois le $\frac{1}{5}$ de l'unité, donc le produit s'obtiendra en prenant 3 fois le $\frac{1}{5}$ de 4.

Mais le $\frac{1}{5}$ de $4 = \frac{4}{5}$ et 3 fois le $\frac{1}{5} = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5}$.

134. Règle —*Pour multiplier une fraction par une fraction, il faut multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.*

Soit à multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{5}{6}$

Il faut former un produit composé avec $\frac{2}{3}$ comme $\frac{5}{6}$ a été formé avec l'unité.

Or $\frac{5}{6}$ a été formé en prenant 5 fois le $\frac{1}{6}$ de l'unité.

Donc le produit s'obtiendra en prenant 3 fois le $\frac{1}{6}$ de $\frac{2}{3}$.

Or le $\frac{1}{6}$ de $\frac{2}{3} = \frac{2}{2 \times 6}$ (rendre une fraction 6 fois plus petite) et 5 fois le $\frac{1}{6} = \frac{2 \times 5}{3 \times 9} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$.

135. Extension de la règle précédente.

Pour prendre des fractions de fractions en nombre quelconque, on multiplie tous les numérateurs entre eux, ainsi que tous les dénominateurs.

Soit à prendre les $\frac{3}{4}$ des $\frac{5}{6}$ de $\frac{2}{3}$

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{3 \times 5 \times 2}{4 \times 6 \times 3} = \frac{5}{12}.$$

IV.—Division des fractions ordinaires.

136. Règle.—*Pour diviser une fraction par un nombre entier, on multiplie le dénominateur par le nombre entier, sans toucher au numérateur ; ou bien, si la chose est possible, on divise le numérateur sans toucher au dénominateur.*

Conséquence du théorème II de la numération des fractions.

137. Règle.—*Pour diviser un nombre entier par une fraction, on multiplie le nombre entier par la fraction diviseur renversée.*

Soit $9 \div \frac{4}{5}$ Appelons Q le quotient.

Le dividende étant égal au produit du diviseur par le quotient, il vient :

$$9 = \frac{4}{5}\ Q.$$

C'est donc que les $\frac{4}{5}$ du quotient valent 9

donc $\frac{1}{5}$ " " $\frac{9}{4}$

et les $\frac{5}{5}$ ou le quotient entier $= \frac{9 \times 5}{4}$ c. q. f. d.

138. Règle.—*Pour diviser une fraction par une fraction, on multiplie la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.*

Soit à diviser $\frac{3}{4} \div \frac{5}{6}$ Soit Q le quotient.

Il vient $\frac{3}{4} = \frac{5}{6} \times Q$

C'est-à-dire que les $\frac{5}{6}$ du quotient $= \frac{3}{4}$

donc le $\frac{1}{6}$ " $= \frac{3}{4 \times 5}$

et les $\frac{6}{6}$ ou le quotient $= \frac{3 \times 6}{4 \times 5}$

§ 2.—Fractions décimales.

A) Numération des fractions décimales.

139. On appelle **fraction décimale** une ou plusieurs parties de l'unité divisée en parties égales de 10 en 10 fois plus petites.

140. Ce qui a été dit, lors de la numération des nombres entiers, pour les nombres partant de 1 et étant de 10 en 10 fois plus grands, peut se répéter pour les nombres partant de 1 et étant de 10 en 10 fois plus petits. En sorte que l'on peut considérer la suite indéfinie des nombres dont le nombre 1 tiendrait le milieu et qui, s'étendant à droite et à gauche, serait, dans toute son étendue, régie par le même principe :

" *Tout chiffre placé à la gauche d'un autre, exprime des unités d'un ordre 10 fois supérieur à cet autre.*"

Ainsi l'unité divisée en 10 parties serait composée de 10 *dizièmes ;* chaque dizième de 10 *centièmes ;* chaque centième de 10 *millièmes*, etc.

141. Pour distinguer les unités entières des parties décimales, on les sépare par une virgule que l'on place entre les unités simples et les dizièmes.

Exemple : 37,6245 s'énonce 37 unités 6245 dix-millièmes, ou encore 376245 dix-millièmes. S'il n'y a pas d'unités entières, on les remplace par un zéro, de même que les unités décimales des ordres qui pourraient manquer.

Exemple : 0,03402.

142. Règle.—*Pour énoncer une fraction décimale ou un nombre décimal, en langage ordinaire, on énonce le nombre comme s'il n'y avait pas de virgule, en lui donnant le nom de l'unité décimale représentée par le dernier chiffre de droite.*

143. Règle.—*Pour écrire une fraction décimale ou un nombre décimal, en chiffres, on l'écrit comme s'il s'agissait d'un nombre entier, en ayant soin de placer la virgule de telle manière que le dernier chiffre à droite soit au rang qui convient à l'unité décimale énoncée.*

144. Principe.—*On ne change pas la valeur d'une fraction décimale, quand on écrit un certain nombre de zéros à sa droite.*

En effet, de même que dans les nombres entiers, les unités de 10 en 10 fois plus grandes vont de droite à gauche, dans les nombres décimaux, les unités de 10 en 10 fois plus petites vont de gauche à droite, et par conséquent, les différents ordres d'unités d'un nombre décimal, dizième, centième, etc.... ne sont pas affectés quand on ajoute des zéros à la droite du nombre.

145. Règle.—*Pour rendre un nombre décimal, 10, 100, 1000..... fois plus grand ou plus petit, il suffit de reculer la virgule de 1, 2, 3... rangs vers la droite ou vers la gauche.*

57,463 est 10 fois plus grand que 5,7463 parce que chaque unité occupe un ordre d'unités 10 fois supérieur au chiffre correspondant dans le 2e et inversement.

B) Calcul des nombres décimaux.

I.—Addition.

146. Règle.—*L'addition des nombres décimaux se fait exactement comme l'addition des nombres entiers.*

On les écrit les uns en dessous des autres de telle sorte que les unités d'un même ordre se trouvent dans une même colonne verticale, c'est-à-dire, d'une façon générale, *que les virgules* se trouvent dans une même colonne verticale.

Exemple : soit à additionner :

7,4652+42,623+125,4+ 0,89786

$$\left.\begin{array}{r} 7{,}46520 \\ 42{,}62300 \\ 125{,}40000 \\ 0{,}89786 \\ \hline 176{,}38606 \end{array}\right\} \text{disposition du calcul}$$

II.—Soustraction.

147. Règle.—*La soustraction se fait comme pour les nombres entiers, en tenant compte de la place des virgules.*

III.—Multiplication.

148. Règle.—*Pour multiplier entre eux deux nombres décimaux, on opère comme si les nombres étaient entiers, sans s'occuper des virgules ; mais, on sépare sur la droite du produit, par une virgule, autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans les deux facteurs réunis.*

Soit à multiplier 14,25 × 3,4

$$\left.\begin{array}{r} 14{,}25 \\ 3{,}4 \\ \hline 5700 \\ 4275 \\ \hline 48{,}450 \end{array}\right\}$$

En supprimant la virgule au multiplicande, on rend ce nombre 100 fois plus grand (145) et, par conséquent, le produit 100 fois plus grand.

En supprimant la virgule au multiplicateur, on rend ce nombre 10 fois plus grand et, par conséquent, le produit 10 fois plus grand. Donc, par la suppression des virgules dans les 2 facteurs, on a rendu le produit $100 \times 10 = 1000$ fois trop grand et, pour lui rendre sa vraie valeur, on doit séparer sur la droite du produit 3 chiffres décimaux.

2e Exemple : $0{,}025 \times 0{,}004 = 0{,}000100 = 0{,}0001$.

IV.—Division.

149. Règle.—*Pour diviser un nombre décimal par un nombre entier, on fait en sorte que les 2 nombres aient le même nombre de chiffres décimaux* (c'est-à-dire que l'on ajoute, à la droite du nombre entier, autant de zéros qu'il y a de chiffres décimaux dans le dividende.

Dès lors, on supprime la virgule au dividende, et on opère comme si les nombres étaient entiers ; lorsque tous les chiffres du dividende sont épuisés, on place une virgule au quotient et on continue l'opération en écrivant un zéro à la droite de

chaque dividende partiel, jusqu'à ce que l'on ait obtenu, au quotient, le nombre de chiffres décimaux marqués par l'approximation désirée.

Exemple : Chercher le quotient de 1245,25 par 37 avec une approximation du $\frac{1}{1000}$.

```
124525     | 3700
11100        33,655
 13525
 11100
  24250
  22200
   20500
   18500
    20000
    18500
     1500
```

Reste de la division de 1245,25 par 37 = 15

Note. Dans la pratique, on fait l'opération sans s'occuper de la virgule du dividende ; lorsque les chiffres de la partie entière du dividende sont épuisés, on place une virgule au quotient et l'on continue l'opération.

150. Règle.—*Pour diviser un nombre entier par un nombre décimal, on opère de la même façon ; on écrit à la droite du dividende autant de zéros qu'il y a de chiffres décimaux dans le diviseur et, après avoir supprimé la virgule, on opère comme précédemment.*

Soit à diviser 37 par 4,25.

```
3700     | 425
3400       8,7     quotient à 1/10 près
 3000               Reste = 0,25
 2975
   25
```

151. Règle.—*Pour diviser un nombre décimal par un nombre décimal, on fait d'abord en sorte que le nombre de chiffres décimaux soit égal dans le dividende et dans le*

diviseur, puis on supprime la virgule, et on opère comme si les nombres étaient entiers.

Soit à diviser 1245,25 par 4,375 à $\frac{1}{1000}$ près

```
1245250 | 4375
 37025    284,628      quotient : 1/1000 près
  20250                Reste = 2,500
   27500
    12500
     37500
      2500
```

En supprimant la virgule au dividende et au diviseur, le quotient n'a pas changé, mais le reste 2500 est 1000 fois trop grand.

Donc reste exact = 2,5

§ 3.—Conversion des fractions ordinaires en fractions décimales

153. Règle.—*Pour convertir une fraction ordinaire en fraction décimale, on divise le numérateur par le dénominateur.*

Exemple : $\frac{5}{8} = 0,625$

Fractions décimales périodiques.

154. Lors de la division du numérateur par le dénominateur d'une fraction irréductible, il peut se présenter 3 cas :

1° La division se fait exactement et le quotient a alors un nombre limité de chiffres. Ce cas donne lieu aux *fractions décimales ordinaires.*

2° La division ne se fait pas exactement et le quotient contient un nombre illimité de chiffres, se reproduisant périodiquement à partir du premier chiffre décimal. Ce cas donne lieu aux *fractions décimales périodiques simples.*

3° La division ne se fait pas exactement et le quotient contient un nombre illimité de chiffres dont une partie seulement se reproduit périodiquement. Ce cas donne lieu aux *fractions décimales périodiques mixtes.*

155. Voyons dans quel cas, on peut reconnaître qu'une fraction ordinaire irréductible donnera une fraction décimale ordinaire, une fraction décimale périodique simple ou une fraction décimale périodique mixte.

1° *Toute fraction ordinaire irréductible* $\frac{M}{D}$ *dont le dénominateur ne contient pas d'autres facteurs premiers que ceux de la base (2 ou 5) donne lieu à une fraction décimale ordinaire.*

Le nombre des chiffres décimaux est marqué par le plus grand exposant du facteur 2 ou 5 contenu dans le dénominateur de la fraction.

EXEMPLE : $\frac{3}{5} = 0,6$; $\frac{5}{8} = \frac{5}{2^3} = 0,625$

2° *Toute fraction ordinaire irréductible* $\frac{M}{D}$ *dont le dénominateur ne contient pas de facteurs premiers contenus dans la base, donne lieu à une fraction décimale périodique simple.*

a) La partie décimale est illimitée. En effet, le dénominateur étant premier avec la base, en multipliant le numérateur par 10 et des puissances de 10, on n'introduit que les facteurs 2 et 5 premiers avec le dénominateur. Donc la division ne pourra jamais se faire exactement

b) La partie décimale est périodique. En effet, comme tous les restes doivent être plus petits que le diviseur et en nombre indéfini, il faudra qu'après un certain nombre de divisions $<$ (D-1) au maximun $>$ les restes se représentent et aussi les quotients (La période est l'ensemble des chiffres qui se reproduisent périodiquement).

EXEMPLE : $\frac{4}{7} = 0,\underbrace{571428}\ \underbrace{571428}\ldots\ldots$

3° *Toute fraction ordinaire irréductible,* $\frac{M}{D}$ *dont le dénominateur contient, outre des facteurs premiers non contenus dans la base, des facteurs de la base, donne lieu à une fraction décimale périodique mixte* (composition des cas 1° et 2°). Le nombre des chiffres non périodiques est déterminé par le plus grand exposant du facteur 2 ou 5 contenu dans le dénominateur; le nombre des chiffres périodiques (fournis par les facteurs premiers avec la base) est égal au maximum à autant d'unités moins 1 qu'il y en a dans le facteur premier avec la base.

EXEMPLE : $\frac{1}{6} = \frac{1}{2 \times 3} = 0{,}1666\ldots\ldots$

$\frac{4}{15} = \frac{4}{5 \times 3} = 0{,}26666\ldots\ldots$; $\frac{3}{140} = \frac{3}{2^2 \times 7 \times 5} = 0{,}02\dot{1}4285\dot{7}$

§ 4.—CONVERSION DES FRACTIONS DÉCIMALES EN FRACTIONS ORDINAIRES.

A) FRACTION DÉCIMALE ORDINAIRE

156. Règle.—*Pour convertir une fraction décimale en fraction ordinaire, on écrit en numérateur le nombre décimal et en dénominateur l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres décimaux dans le nombre décimal proposé.*

EXEMPLE : $0{,}825 = \frac{825}{1000}$; $5{,}67 = \frac{567}{100}$; $245{,}8 = \frac{2458}{10}$

B) FRACTION DÉCIMALE PÉRIODIQUE SIMPLE

157. Soit une fraction décimale périodique simple

$$N = 0,abc\ abc\ abc\ldots \quad (1)$$

abc étant la période. Multiplions les 2 membres par l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres périodiques, (par 1000 dans ce cas)

Il vient $1000\ N = abc,\ abc\ abc\ldots$ (2)

Retranchons (1) de (2), il vient :

$$999\,N = abc \quad \text{d'où}$$

$$N = \frac{abc}{999} \quad \text{d'où}$$

Règle.—*Toute fraction décimale périodique simple est égale à une fraction ordinaire, dont le numérateur est formé de la période et dont le dénominateur est formé d'un nombre composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période.*

158. *La période d'une fraction périodique simple est divisible par le numérateur de la fraction irréductible qui a donné la fraction périodique.*

Soit en effet $\frac{M}{D}$ la fraction irréductible qui a donné naissance à la fraction périodique $0,abc\,abc\,abc\ldots$ donc

$$\frac{M}{D} = 0,abc\,abc\ldots \quad \text{d'où}$$

$$1 = \frac{(0,abc\,abc\ldots)D}{M}$$

Or la fraction étant irréductible, M et D sont premiers entre eux, donc M doit diviser $0,abc\,abc$, donc aussi abc.

C) Fraction périodique mixte.

159. Soit une fraction décimale périodique mixte

$$N = 0,de\,abc\,abc\,abc\ldots \quad (1)$$

de étant la partie non périodique et abc la partie périodique.

Multiplions les 2 membres de (1) par l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres dans la partie non périodique et dans la partie périodique (Dans ce cas 100000) il vient :

$$100000\,N = de\,abc,abc\,abc\ldots \quad (2)$$

Multiplions (1) par l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres dans la partie non périodique, il vient :

$$100\,N = de,abc\,abc\ldots \quad (3)$$

Retranchons (3) de (2) il viendra :

$$100000\,N - 100\,N = de\ abc - de$$

$$99900\,N = de\ abc - de$$

$$N = \frac{de\ abc - de}{99900} \qquad \text{D'où}$$

Règle.—*Toute fraction décimale périodique mixte est égale à une fraction ordinaire, dont le numérateur est égal à la partie non périodique suivie de la partie périodique, moins la partie non périodique ; et, dont le dénominateur est formé d'un nombre composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période suivis d'autant de zéros qu'il y a de chiffres dans la partie non périodique.*

EXEMPLE : $0{,}2666\ldots = \frac{26-2}{90} = \frac{24}{90} = \frac{4}{15}$

$$0{,}43276587658\ldots = \frac{4327658 - 432}{9999000} = \frac{4327226}{9999000} = \frac{2163613}{4999500}$$

160. *Le numérateur de la génératrice d'une fraction périodique mixte, ne peut être terminé par un zéro.*

En effet, si cela pouvait avoir lieu, on devrait, dans le numérateur de la valeur de

$$N = \frac{de\ abc - de}{99900} \quad \text{avoir,} \quad \begin{matrix} e = c \\ c = e \end{matrix} \quad \text{ou}$$

et alors la partie périodique commencerait un chiffre plus tôt et la partie non périodique n'aurait plus que un chiffre d ce qui est contre l'hypothèse.

§ 5.—FRACTIONS CONTINUES

161. Les *fractions continues* doivent leur origine à l'évaluation approchée des fractions dont les termes sont grands et premiers entre eux.

Les fractions continues sont du domaine de l'algèbre et y donnent lieu à une théorie dont les propriétés sont très importantes. Certaines fractions de la forme $a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \ldots}}}$ sont facilement transformées en fractions ordinaires par la méthode des fractions continues.

Nous croyons rendre service aux élèves en leur indiquant, par une théorie facile et très succinte, la formation des *réduites* successives qui donnent la valeur de la fraction cherchée.

162. Les fractions continues sont des expressions de la forme

$$a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d+}}}$$

En effectuant les opérations indiquées dans cette expression, on obtient pour résultat une fraction ordinaire qui est la valeur de la fraction continue.

Soit par exemple : $3+\frac{1}{5+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}}$ on trouve successivement :

$$2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}; \qquad \frac{1}{2+\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{9}{4}}=\frac{4}{9};$$

$$5+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}=5+\frac{4}{9}=\frac{49}{9}; \quad \frac{1}{5+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}}=\frac{1}{\frac{49}{9}}=\frac{9}{49} \quad \text{et}$$

enfin $$3+\frac{1}{5+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}}=3+\frac{9}{49}=\frac{156}{49}$$

163.—Supposons qu'on veuille réduire en fraction continue une expression fractionnaire $\frac{A}{B}$

A et B étant des nombres entiers.

On aura $\frac{A}{B}=a+\frac{C}{B}=a+\frac{1}{\frac{B}{C}}$ C étant le reste

Divisant B par C il vient :

$\frac{B}{C}=b+\frac{D}{C}=b+\frac{1}{\frac{C}{D}}$ D étant le reste de la division

de même

$\frac{C}{D}=c+\frac{E}{D}=c+\frac{1}{\frac{D}{E}}$ et ainsi de suite. D'où

$$\frac{A}{B} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \ldots}}}$$ Donc

Pour convertir une fraction ordinaire en fraction continue, il faut opérer sur ses deux termes comme si on voulait trouver leur P. G C. D.

Soit à réduire $\frac{287}{167} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}}}}$ qu'on écrit par abréviation (1,1,2,1,1,4,5,)

164.- On appelle **quotient incomplet** des nombres tels que $a, b, c, d \ldots$ qui entrent dans la fraction continue ; **quotient complet** chaque quotient incomplet suivi de toute la quantité qui lui est jointe par le signe $+ \left(b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}} \right)$; les fractions $\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$, s'appellent **fractions partielles.**

Les expressions a, $a + \frac{1}{b}$, $a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}$, etc., formées par les différentes fractions partielles portent le nom de **réduites** ou **fractions convergentes.**

165. *Loi de la formation des réduites.*

On a pour les deux premières :

$$a = \frac{a}{1} \qquad a + \frac{1}{b} = \frac{ab+1}{b}$$

On passera à la 3e réduite en changeant, dans la 2e, b en $\left(b + \frac{1}{c}\right)$ et il vient alors :

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = \frac{a\left(b + \frac{1}{c}\right) + 1}{b + \frac{1}{c}} = \frac{a\left(\frac{bc+1}{c}\right) + 1}{\frac{bc+1}{c}} = \frac{abc + a + c}{bc + 1}$$

3e réduite $= \frac{(ab+1)c + a}{(bc+1)}$ et ainsi de suite.

On en déduit donc *qu'une réduite quelconque, à partir de la 3e, peut être formée en multipliant les deux termes de la*

réduite précédente par le quotient incomplet de la réduite considérée et ajoutant respectivement aux produits les deux termes de l'avant précédente réduite.

166. Soit à former les réduites ou fractions convergentes de la fraction continue représentée par :

$$X = (1,4,2,1,2,1,4)$$

On trouve par l'application de la Règle N° 165 les fractions convergentes suivantes :

$$\frac{1}{1}, \frac{5}{4}, \frac{11}{9}, \frac{16}{13}, \frac{43}{35}, \frac{59}{48}, \frac{279}{227}$$

NOTE.—Si, dans la fraction $\frac{A}{B}$, B est plus grand que A, on écrira $\frac{A}{B} = \frac{1}{\frac{B}{A}}$. On opère comme précédemment, mais les réduites trouvées doivent être renversées, puisque les valeurs approchées doivent toutes être plus petites que l'unité.

CHAPITRE IV.

§ 1.—Puissances et racines des nombres.

167. On appelle **puissance** d'un nombre, le produit de ce nombre multiplié un certain nombre de fois par lui-même.

La *2e puissance* ou **carré** d'un nombre est le produit de ce nombre par lui-même ; la *3e puissance* ou **cube** d'un nombre est le produit de ce nombre pris trois fois comme facteur et ainsi de suite.

168. La puissance s'indique par un chiffre placé à la droite et au-dessus du nombre Ce chiffre ou indice de la puissance s'appelle l'**exposant**.

Ainsi la 3e puissance ou cube de 2 s'écrira 2^3.

169. Théorème.—*Si un nombre premier divise une puissance d'un nombre, il divise ce nombre et réciproquement.*

Soit a un nombre premier divisant A^3 ; je dis que a divise A.

En effet $A^3 = A \times A \times A$. En vertu de (96), a divise un des facteurs A.

170 Théorème —*Si deux nombres sont premiers entre eux, leurs puissances sont premières entre elles et réciproquement.*

Si a et b sont premiers entre eux, je dis que a^2 et b^2 sont aussi premiers entre eux.

Car, s'ils admettaient un facteur premier commun, il diviserait séparément a et b, ce qui est impossible, puisque a et b sont premiers entre eux.

171. La **racine** d'un nombre est un autre nombre qui, multiplié par lui-même autant de fois que l'indique l'indice de la racine, reproduit le nombre donné.

Ainsi la racine carrée d'un nombre est un autre nombre qui, multiplié par lui-même, reproduit le nombre donné.

172. L'indication d'extraction de la racine est donnée par le signe $\sqrt{}$ qu'on appelle **radical**.

173. L'indice du radical est un chiffre qui se place dans l'ouverture du signe $\sqrt{}$ et qui indique à quelle espèce de racine on a affaire.

EXEMPLE : $\sqrt[2]{9}=3$ parce que $3\times3=9$ et on dit que la racine carrée de $9=3$

$\sqrt[3]{8}=2$ parce que $2\times2\times2=8$: racine cubique de $8=2$

$\sqrt[n]{a^n}=a$ " " $\underbrace{a\times a\times a\ldots}=a^n$: racine n^e de $a^n=a$

§ 2.—DU CARRÉ ET LA RACINE CARRÉE.

174. On appelle **carré** d'un nombre, le produit de ce nombre pris deux fois comme facteur.

175. Théorème I.—*La différence entre les carrés de deux nombres consécutifs vaut l'unité augmentée du double du plus petit de ces nombres.*

En effet on a :

$$(a+1)^2-a^2=a^2+2a+1-a^2=2a+1$$

Corollaire.—La partie entière de la racine carrée d'un nombre fractionnaire est identique à celle de la partie entière de ce nombre.

176. Théorème II.—*La partie entière de la racine carrée d'un nombre N se compose d'autant de chiffres qu'il y a d'unités exactes ou par excès, dans la moitié du nombre de chiffres de la partie entière de N.*

Soit N' la racine carrée de N et ayant n chiffres à sa partie entière.

N' ayant n chiffres est plus petit que le plus petit nombre de $(n+1)$ chiffres, et plus grand ou tout au moins égal au plus petit nombre de n chiffres. C'est-à-dire :

$10^{n-1}\leq N'<10^n$ D'où élevant au carré

$10^{2n-2}\leq N<10^{2n}$

Or 10^{2n} est le plus petit nombre de $(2n+1)$ chiffres et
10^{2n-2} " " " " " $(2n-1)$ "

On peut donc dire que puisque N est $<10^{2n}$, il ne peut avoir $(2n+1)$ chiffres et puisque N est $\geq 10^{2n-2}$ il peut avoir au minimum $(2n-1)$ chiffres.

N aura donc $(2n-1)$ ou $2n$ chiffres, c'est-à-dire n tranches de 2 chiffres, l'une de celles-ci pouvant n'avoir que 1 chiffre.

177. Théorème III.—*La racine carrée du plus grand carré entier, contenu dans le nombre formé par les chiffres situés à gauche des deux chiffres de droite de N, exprime le nombre de dizaines de $\sqrt{N}$.*

En effet, désignons par a le nombre de dizaines, par b le chiffre des unités de $\sqrt{N}$ et R l'excès de N sur le plus grand carré entier qui y est contenu. On aura :

$$N=(a.10+b)^2+R=(a.10)^2+2(a.10)b+b^2+R$$

Or la partie $(a.10)^2$ ne peut donner de chiffres significatifs d'ordre inférieur à celui des centaines ; donc cette partie ne pourra être contenue que dans les centaines de N.

Soit N' les centaines contenues dans N.

Nous allons prouver que la racine carrée du plus grand carré entier compris dans N' est précisément a.

Soit en effet a' la partie entière de $\sqrt{N'}$, on a :

$a' \leq \sqrt{N'} < a'+1$ d'où élevant au carré, on a :

$a'^2 \leq N' < (a'+1)^2$ et par suite, si N" représente le nombre formé par les deux chiffres de droite de N, on a :

$a'^2 \leq N', N'' < (a'+1)^2$ puisque

$0, N''$ est <1 (**théorème I**)

D'où enfin $a'^2.10^2 \leq N'N'' < (a'+1)^2\, 10^2$ Or $N'N''=N$

donc $a'10 \leq \sqrt{N} < (a'+1)10$

Ainsi $\sqrt{N}$ est compris entre a' et $(a'+1)$ dizaines

donc $a=a'$

Corollaire.—Le premier chiffre de $\sqrt{N}$ s'obtient en extrayant la racine carrée du plus grand carré entier contenu dans la tranche de gauche du nombre N, décomposé en groupes de deux chiffres, à partir de la droite.

Si N' est composé de plus de deux chiffres, on raisonne sur N' comme sur N, et on reconnaît que la racine carrée du plus grand carré entier contenu dans le nombre de centaines de N', est le nombre de dizaines de $\sqrt{N'}$ et ainsi de suite.

178. Théorème IV.—*Si, après avoir retranché de N, le carré des dizaines de la racine, on divise le reste du nombre de centaines, suivi au préalable du 1er chiffre de la tranche suivante, par le double du nombre de dizaines obtenu à la racine, on aura le chiffre des unites ou un chiffre trop élevé.*

En effet, après avoir retranché de N, le carré des dizaines ; il vient :

$$N-(a.10)^2 = 2(a\ 10)b + b^2 + R$$

Or, la partie $2(a.10)b$ ne peut donner d'unités significatives d'un ordre inférieur aux dizaines ; donc le chiffre de droite de l'excès indiqué ne peut en faire partie ; et par suite, en divisant le nombre formé par les chiffres à gauche du chiffre de droite, par le double du nombre des dizaines, on aura le chiffre des unités ou un chiffre trop fort, car cette partie contient encore des unités de report, ayant pour origine le carré b^2 des unités et le reste R.

Corollaire.—On obtiendra donc le second chiffre de la racine, ou un chiffre trop fort, en divisant l'excès de la tranche de gauche sur le plus grand carré entier qui y est contenu, mais suivi du premier chiffre de la tranche suivante, par le double du premier chiffre de la racine.

Remarque I.—Lorsqu'après avoir déterminé un reste, et placé à sa droite le premier chiffre de la tranche suivante, le nombre ainsi formé est moindre que le double de la partie déjà obtenue à la racine, on place un zéro à la racine, afin de conserver aux chiffres précédents leur valeur relative ; et pour

continuer l'opération, on écrit le second chiffre de la tranche considérée, puis le suivant, et on continue comme précédemment.

Remarque II.—Il arrive parfois qu'on présume à tort, qu'un chiffre à essayer est trop grand, et qu'on le diminue immédiatement de *une* ou de *plusieurs unités* ; dans ce cas on sera averti qu'on s'est trompé, lorsque le *reste sera supérieur au double de la racine ainsi déterminée.* (**théorème I**)

179. Les théorèmes précédents permettent à l'élève de formuler la règle pour déterminer la partie entière de la racine carrée d'un nombre.

EXEMPLE :

5602689	2367		
4	43	466	4727
16.0	3	6	7
129	129	2796	33089
312.6			
279 6			
3308.9			
3308 9			
0			

180. Si à la fin de l'opération, il n'y a pas de reste, le nombre est dit **carré parfait** et la racine est exacte.

§ 3.—Lois des nombres non carrés parfaits.

181. Théorème I.—*Tout nombre N admettant un facteur premier* a, *n'est pas carré parfait, s'il n'est pas divisible par* a^2.

En effet, la $\sqrt{N}$ ne peut être que de la forme

$$na$$

Donc le carré doit admettre le facteur a^2

Corollaire.—*Tout nombre pair qui n'est pas multiple de 4 n'est pas carré parfait.*

182. Théorème II.—*Tout nombre impair N qui, diminué de une unité, n'est pas divisible par 4, n'est pas un carré parfait.*

Car, la racine carré de N aurait la forme $(2n+1)$, dont le carré $4n^2 + 4n + 1$ admet le diviseur 4 après avoir été diminué de 1 unité.

183. Théorème III.—*Tout nombre terminé par un des chiffres 2, 3, 7 ou 8 n'est pas carré parfait.*

Cela résulte de ce que le carré de chacun des 9 premiers nombres n'est terminé par aucun de ces chiffres.

184. Théorème IV—*Tout nombre terminé par un nombre impair de zéros, n'est pas carré parfait.*

En effet, la racine terminée par des zéros, donnerait un carré ayant à sa droite un nombre pair de zéros.

185. Théorème V.—*Tout nombre terminé par 5 n'est pas carré parfait, si le chiffre des dizaines n'est pas 2.*

Car la racine a pour forme $(a.10+5)$ dont le carré est

$$(a.10)^2 + 2(a.10)5+5^2 =$$
$$(a.10)^2 + (a.10)10+5^2$$

c'est-à-dire un nombre terminé par 25.

186. Théorème VI.—*Tout nombre terminé par 6 n'est pas carré parfait, si le nombre de ses dizaines n'est pas impair.*

En effet, la racine carrée devrait être terminée par 4 ou par 6 dont les carrés donnent 16 ou 36 ayant un nombre impair de dizaines.

187. Théorème VII—*Un nombre N est premier lorsque, n'étant pas carré parfait, il n'est divisible par aucun des nombres premiers moindre que sa racine carrée* (partie entière).

En effet, si N était divisible par un facteur premier $>$ que $\sqrt{N}$, le quotient serait $<\sqrt{N}$ et par suite, N admettrait un facteur premier moindre que $\sqrt{N}$, ce qui est contre l'hypothèse.

§ 4.—Racine carrée par approximation.

188. Lorsque le nombre N, dont on demande la racine carrée, n'est pas un carré parfait, on se propose souvent de déterminer $\sqrt{N}$ *avec une approximation donnée*, par exemple, à moins de $\frac{1}{p}$ ème ; alors il faut entendre sous cette désignation, qu'il s'agit de *trouver deux nombres consécutifs* de $p^{\text{ièmes}}$ comprenant entre eux $\sqrt{N}$

189. Théorème.—*Les nombres consécutifs de $p^{\text{ièmes}}$ qui comprennent $\sqrt{N}$, sont respectivement les racines carrées des carrés entiers consécutifs, entre lesquels Np^2 est intercalé.*

Soient, en effet, $\frac{x}{p}$ et $\frac{x+1}{p}$ deux nombres de $p^{\text{ièmes}}$ consécutifs comprenant entre eux $\sqrt{N}$, on a :

$$\frac{x}{p} < \sqrt{N} < \frac{x+1}{p}$$

D'où élevant au carré, on a :

$$\frac{x^2}{p^2} < N < \frac{(x+1)^2}{p^2} \qquad \text{c'est-à-dire}$$

$$x^2 < Np^2 < (x+1)^2$$

et par suite en extrayant la racine

$$x < \sqrt{Np^2} < (x+1) \qquad (1) \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Ainsi pour obtenir $\sqrt{N}$ à moins de $\frac{1}{p}$ ème, il faut *diviser par p les racines carrées entières, par défaut et par excès, du produit Np^2 déterminé à moins de une unité.*

Exemple : Extraire $\sqrt{453}$ à moins de $\frac{1}{6}$ près

$$453 \times 6^2 = 453 \times 36 = 16308$$

$\sqrt{16308} = 127$ par défaut et 128 par excès

Donc $\frac{127}{6} = 21\frac{1}{6}$ et $\frac{128}{6} = 21\frac{2}{6}$ sont les racines cherchées.

Corollaire. — En posant $p=10, 100, 1000, \ldots$ on reconnaît que, pour déterminer $\sqrt{N}$ avec une, deux, trois.... décimales, il faut multiplier N par 10^2, 100^2, 1000 .... ou placer à sa droite deux, quatre, six....zéros ; et séparer une, deux, trois....décimales à la racine carrée entière du nombre ainsi préparé.

190. Lorsque N est une fraction décimale, il faut préparer N de telle sorte qu'elle ait deux fois autant de chiffres décimaux qu'on veut en avoir à $\sqrt{N}$; on fait abstraction de la virgule et l'on sépare, sur la droite de la racine carrée obtenue, les décimales demandées.

Lorsque N est une fraction ordinaire, on la réduit en décimales jusqu'à ce que l'on ait deux fois autant de chiffres décimaux qu'on veut en avoir à la racine ; et on opère ensuite comme précédemment.

191. Lorqu'on veut déterminer $\sqrt{\frac{a}{b}}$ sans que l'approximation soit donnée, il suffit de mettre cette fraction sous la forme $\frac{ab}{b^2}$ pour être fixé sur la grandeur de l'unité subdivisionnaire ; car le résultat sera $\frac{\sqrt{ab}}{b}$

192. Si l'approximation de $\frac{1}{p}$ devient $\left(\frac{a}{b}\right)$ la formule (1) (189) devient

$$x<\sqrt{\frac{Nb^2}{a^2}}<(x+1) \qquad \text{et par suite}$$

$$\frac{x\times a}{b}<\frac{a}{b}\sqrt{\frac{Nb^2}{a^2}}<\frac{(x+1)a}{b}$$

Il faut donc multiplier par $\frac{a}{b}$ les racines carrées entières, par défaut et par excès, du produit $\frac{Nb^2}{a^2}$ déterminé à moins de une unité,

EXEMPLE : $\sqrt{453}$ à $\frac{5}{6}$ près

$$\frac{Nb^2}{a^2}=\frac{453\times36}{25}=652 \text{ à moins de une unité}$$

$\sqrt{652}=25$ par défaut$=26$ par excès, et par suite

$$\frac{a}{b}x=\frac{5}{6}\times25=\frac{125}{6}=20\frac{5}{6} \text{ et}$$

$$\frac{a}{b}(x+1)=\frac{5}{6}\times26=\frac{130}{6}=21\frac{4}{6}$$

Les deux racines sont donc $20\frac{5}{6}$ (par défaut) et $21\frac{4}{6}$ (par excès).

Leur différence est de $\frac{5}{6}$

§ 5.—DU CUBE ET DE LA RACINE CUBIQUE.

193. On appelle **cube** d'un nombre, le produit de ce nombre pris 3 fois comme facteur.

Les cubes des neuf premiers nombres sont :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8	27	64	125	216	343	512	729

194. Théorème I.—*La différence entre les cubes de deux nombres qui diffèrent de une unité, vaut l'unité augmentée du triple produit du plus petit de ces nombres, par lui-même augmenté de un.*

En effet :

$$(a+1)^3-a^3=3a^2+3a+1=1+3a(a+1)$$

Corollaire.—La partie entière de la racine cubique d'un nombre fractionnaire est identique à celle de la partie entière de ce nombre.

195. Théorème II.—*La partie entière de la racine cubique d'un nombre N, se compose d'autant de chiffres qu'il y a d'unités exactes ou par excès, dans le tiers du nombre de chiffres de la partie entière de N.*

Soit N' la racine cubique de N et ayant n chiffres à sa partie entière. On a identiquement, d'après un raisonnement précédent (176).

$$10^{n-1} \leq N' < 10^n$$

Elevant au cube

$$10^{3n-3} \leq N'^3 < 10^{3n}$$

$$10^{3n-3} \leq N < 10^{3n}$$

Or 10^{3n-3} est formé de $3n-2$ chiffres, et

10^{3n} " " " $3n+1$ chiffres ; c'est-à-dire qu'ils admettent (n) et ($n+1$) tranches de 3 chiffres *une d'entre elles n'en ayant qu'un.* Donc N ne peut avoir ($3n+1$) chiffres et en aura au minimum ($3n-2$). Il peut donc avoir ($3n-2$), ($3n-1$) ou $3n$ chiffres. C. q. f. d.

196. Théorème III.—*La racine cubique du plus grand cube entier, contenu dans le nombre formé par les chiffres situés à gauche des trois chiffres de droite de N, est le nombre de dizaines de* $\sqrt[3]{N}$

En effet, désignons par a le nombre de dizaines, par b le chiffre des unités de $\sqrt[3]{N}$ et R l'excès de N sur le plus grand cube entier qui y est contenu.

Il vient :

$$N=(a.10+b)^3+R=(a.10)^3+3(a.10)^2\,b+3\,(a.10)b^2+b^3+R$$

Or, la partie $(a.10)^3$ ne peut donner d'unités significatives d'un ordre inférieur aux mille ; donc cette partie ne peut se trouver que dans les mille de N.

Soit N' le nombre formé par les mille de N ; appelons N'' le nombre formé par les 3 chiffres de droite de N.

Je dis que la racine cubique du plus grand cube entier compris dans N' est précisement a

Car, a' étant la partie entière de $\sqrt[3]{N'}$, on a

$a' < \sqrt[3]{N'} < (a'+1)$ et élevant au cube

$a'^3 \leq N' < (a'+1)^3$ et, puisque 0, N'' est moindre que l'unité, on a

$a'^3 < N', N'' < (a'+1)^3$ et multipliant par 10^3 pour

avoir $N'N''=N$, on a

$$a'^3\,10^3 < N'N'' \text{ ou } N < (a'+1)^3\,10^3 \quad \text{d'où}$$

$$a'10 < \sqrt[3]{N} < (a+1)\,10$$

Ainsi $\sqrt[3]{N}$ est comprise entre a' et $(a'+1)$ dizaines

Donc $a=a'$

Corollaire.—Le premier chiffre de $\sqrt[3]{N}$ s'obtient en extrayant la racine cubique du plus grand cube entier contenu dans la tranche de gauche du nombre N, décomposé en groupe de 3 chiffres à partir de la droite.

Car si N' est composé de plus de 3 chiffres, on raisonnera sur N' comme on l'a fait sur N.

197 Théorème IV.—*Si, après avoir retranché de N le cube des dizaines de sa racine, on divise le reste du nombre de mille, suivi au préalable du premier chiffre de la tranche suivante, par le triple carré du nombre de dizaines obtenu à la racine, on aura le chiffre des unités, ou un chiffre trop fort.*

En effet, le reste total de cette soustraction est :

$$3(a.10)^2\,b+3\,(a.10)b^2+b^3+R$$

Or, la partie $3\,(a.10)^2\,b$ ne peut donner d'unités significatives d'un ordre inférieur aux centaines, donc les deux chiffres de droite de l'excès précédent ne peuvent en faire partie ; par suite, en divisant le nombre formé par les chiffres qui précèdent le chiffre de droite, par le triple carré du nombre (a) des dizaines trouvé à la racine, on aura le chiffre des unités ou un chiffre trop fort, puisque cette partie contient encore les reports provenant de $3\,(a.10)b^2$, b^3 et R.

Corollaire. – On obtient le second chiffre de la racine, ou un chiffre trop fort, en divisant l'excès de la tranche de gauche sur le plus grand cube entier qui y est contenu, mais suivi, au préalable, du premier chiffre de la tranche suivante, par le triple carré du premier chiffre de la racine.

Remarque I.—Lorsque, après avoir déterminé un reste et placé à sa droite le premier chiffre de la tranche suivante, on obtient un nombre inférieur au triple carré de la partie

obtenue à la racine, on place un zéro à la racine, afin de conserver aux chiffres précédents leurs valeurs relatives ; pour continuer l'opération, on écrit les deux chiffres suivants de la tranche considérée et le premier chiffre de la tranche suivante, puis on continue comme précédemment.

Remarque II.—Il arrive parfois qu'on présume, à tort, qu'un chiffre est trop grand, et qu'on le diminue immédiatement de *une* ou de *plusieurs* unités ; alors, on sera averti de l'erreur lorsque le reste sera supérieur au produit du triple de la racine obtenue par cette même racine augmentée de l'unité, c'est-à-dire $3a(a+1)$ [Théorème I]

198. Afin de vérifier si le second chiffre trouvé à la racine est bon, il faut former la somme $3\,(a.10)^2\,b+3\,(a.10)b^2+b^3$ et celle-ci doit pouvoir se retrancher de l'excès de la tranche de gauche sur le plus grand cube qui y est contenu, et suivi de la tranche suivante

Cette somme (S) peut se mettre sous la forme

$$b\,[3\,(a.10)^2+3\,(a.10)b+b^2\,]$$

On forme donc successivement $3(a.10)^2$; $3(a\,10)b$; et b^2 La somme (s) de ces 3 quantités multipliée par b doit pouvoir se retrancher de l'excès cité plus haut.

199. Les théorèmes précédents permettent à l'élève de formuler une règle pour déterminer la partie entière de la racine cubique d'un nombre

Exemple : Soit à extraire $\sqrt[3]{94\,943\,632\,328}$

Disposition des calculs :

94.943.632.328	4562			
64	4800	607500	62380800	$3(a.10)^2$
309.43	600	8100	27360	$3(a.10)b$
271 25	25	36	4	b^2
38186.32	5425	615636	62408164	s
36938 16	5	6	2	b
1248163.28	27125	3693816	124816328	S
1248163 28				
0				

200. Si, à la fin de l'opération, il n'y a pas de reste, le nombre est dit *cube parfait* et la racine est exacte.

§ 6.— RACINE CUBIQUE PAR APPROXIMATION.

201.—Lorsque le nombre dont on demande la racine cubique n'est pas un cube parfait, on se propose souvent de déterminer cette racine avec *une approximation donnée*, par exemple, *à moins de un $p^{ième}$* ; et il s'agit alors de *trouver deux nombres consécutifs de $p^{èmes}$ comprenant la racine cubique du nombre donné.*

202. Théorème. – *Les nombres successifs de $p^{èmes}$ qui comprennent $\sqrt[3]{N}$, sont respectivement les racines cubiques des cubes entiers consécutifs, entre lesquels Np^3 est intercalé.*

En effet, désignons par $\frac{x}{p}$ et $\frac{x+1}{p}$ les deux nombres consécutifs de $p^{èmes}$ entre lesquels $\sqrt[3]{N}$ est comprise, on a :

$$\frac{x}{p} < \sqrt[3]{N} < \frac{x+1}{p}$$

d'où élevant au cube

$$\frac{x^3}{p^3} < N < \frac{(x+1)^3}{p^3} \quad \text{d'où}$$

$$x^3 < Np^3 < (x+1)^3 \quad \text{et enfin}$$

$$x < \sqrt[3]{Np^3} < (x+1) \qquad (1)$$

Ainsi, *pour obtenir $\sqrt[3]{N}$ à moins de $\frac{1}{p^{ième}}$ il faut diviser par p les racines cubiques entières, par défaut et par excès du produit Np^3.*

EXEMPLE : Déterminer $\sqrt[3]{21\frac{2}{7}}$ avec une erreur $< \frac{1}{6}$

$$Np^3 = 21\frac{2}{7} \times 6^3 = \frac{149 \times 216}{7} = \frac{32184}{7} = 4597\frac{5}{7}$$

$\sqrt[3]{4597}$ est comprise entre 16 et 17

D'où $\sqrt[3]{21\frac{2}{7}}$ " " " $\frac{16}{6}$ et $\frac{17}{6}$ ou $2\frac{2}{3}$ et $2\frac{5}{6}$

Corollaire.—Si on pose $p = 10, 100, 1000 \ldots$ c'est-à-dire si on veut obtenir $\sqrt[3]{N}$ avec une, deux, trois ... décimales, il faut multiplier N par 10^3, 100^3, $1000^3 \ldots$ ou

placer à sa droite trois, six, neuf . . . zéros ; et séparer une, deux, trois . . . décimales à la racine cubique entière du nombre ainsi préparé.

203. Lorsque N est une fraction décimale, il faut la préparer de telle sorte qu'elle ait trois fois autant de décimales qu'on veut en avoir à $\sqrt[3]{N}$; puis faire abstraction de la virgule, et séparer sur la droite de la racine cubique entière obtenue, les décimales demandées.

Lorsque N est une fraction ordinaire, on la réduit en décimales jusqu'à ce qu'on ait trois fois autant de chiffres décimaux qu'on veut en avoir à la racine, et on opère comme précédemment.

204. Lorsqu'on veut déterminer $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ sans que l'approximation soit donnée, il suffit de mettre cette fraction sous la forme $\frac{ab^2}{b^3}$, pour être fixé sur la grandeur de l'unité subdivisionnaire, car le résulat sera $\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}$

205. Si l'approximation $\frac{1}{p}$ devient $\frac{a}{b}$ la formule (1) (**202**) devient :

$$x<\sqrt[3]{\frac{Nb^3}{n^3}}<x+1 \qquad \text{et par suite}$$

il faut multiplier par $\frac{a}{b}$ *les racines cubiques entières, par défaut et par excès, du produit* $\frac{Nb^3}{a^3}$ *déterminé à moins de une unité.*

Exemple : Extraire $\sqrt[3]{21\frac{2}{7}}$ à $\frac{5}{6}$ près.

$$Np^3=\frac{21\frac{2}{7}\times 6^3}{5^3}=\frac{149\times 216}{7\times 125}=\frac{32184}{875}=36 \text{ par défaut}$$

$\sqrt[3]{36}$ est comprise entre 3 et 4

Donc $\sqrt[3]{21\frac{2}{7}}$ est comprise entre $\frac{3\times 5}{6}$ et $\frac{4\times 5}{6}$ ou $\frac{15}{6}$ et $\frac{20}{6}$

CHAPITRE V.

SYSTÈMES DES POIDS ET MESURES.

---

§ 1.—Système métrique

206. L'unité fondamentale de ce système est une longueur que l'on a appelé **mètre**. Le mètre est la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre ou la quarante-millionième partie du méridien.

207. Anciennement et avant 1789, les mesures dont on se servait étaient très variables et différentes, ce qui apportait dans les relations commerciales, non-seulement de grandes complications, mais encore des fraudes et des abus auxquels on se décida à mettre un terme en cherchant une mesure prise dans la nature, et l'on s'arrêta à une subdivision de la mesure du globe terrestre.

Le *mètre étalon en platine* a été déposé aux archives de Paris. Ce système adopté primitivement par la France, l'est aujourd'hui par presque tous les Etats de l'Europe.

En Amérique, on suit sérieusement le mouvement ; des considérations de routine seules empêchent d'admettre ce système trop brusquement.

208. On a reconnu que l'étalon du mètre conservé à Paris est un peu trop court et que, dans le $\frac{1}{4}$ du méridien terrestre, il y a 10 000.724 mètres et que de plus tous les méridiens ne sont pas égaux entre eux.

On a calculé que cette unité a une longueur de 3 pieds 11 lignes 296.

209. Les unités principales du système sont au nombre de 6 :

1° le **mètre** pour les mesures de *longueur*
2° le **mètre carré** et l'**are** pour les mesures de *surface*
3° le **mètre cube** ou **stère** pour les mesures de *volume*
4° le **litre** pour les mesures de *capacité*
5° le **gramme** " " " *poids*
6° le **franc** " " " *monnaie*

A.—*Mesure des longueurs.*

210 L'unité fondamentale de mesure des longueurs est le *mètre.* Les sous-multiples du mètre sont :

le **décimètre** $= \frac{1}{10}$ partie du mètre
le **centimètre** $= \frac{1}{100}$ " " "
le **millimètre** $= \frac{1}{1000}$ " " "

Les multiples du mètre sont :

le **décamètre** = 10 mètres
l'**hectomètre** = 100 "
le **kilomètre** = 1000 "
le **myriamètre** = 10000 "

La *chaîne d'arpenteur* vaut 1 décamètre$=10^m$

Le *kilomètre* sert presque exclusivement pour la mesure des grandes distances. L'*hectomètre* ne sert que pour le bornage des routes ; le *myriamètre* ne sert que dans les travaux de triangulation des pays.

Pour les petites mesures, on se sert des sous-multiples.

B.—*Mesure des surfaces.*

211 L'unité fondamentale de mesure des surfaces est le *mètre carré* ou *centiare* : c'est un carré ayant 1 mètre de côté.

Les sous-multiples sont :

le **décimètre carré** qui vaut $\frac{1}{100}$ mètre carré

le **centimètre carré** " " $\frac{1}{10000}$ " "

le **millimètre carré** " " $\frac{1}{1000000}$ " "

Les multiples sont :

le **décamètre carré** ou **are** qui vaut 100 m² : c'est l'unité de mesure des surfaces agraires

l'**hectomètre carré** ou **hectare** qui vaut 10000 m² ou 100 ares

le **kilomètre carré** qui vaut 1.000.000 m² ou 100 hectares

L'*hectare* et ses sous-multiples, l'*are* et le *centiare*, servent aux mesures agraires.

Les subdivisions du mètre carré sont de 100 en 100 fois plus petites ; il faut donc 2 chiffres pour exprimer un ordre d'unités.

Le nombre $62^{m^2},425672$ s'énonce 62 mètres carrés, 42 décimètres carrés, 56 centimètres carrés, 72 millimètres carrés.

C.—*Mesure des volumes.*

212. L'unité fondamentale de mesure des volumes est le **mètre cube** ou *stère* : c'est un cube ayant un mètre en hauteur, en largeur et en longueur.

Les sous-multiples sont :

Le **décimètre-cube** qui vaut $\frac{1}{1000}$ du mètre cube

Le **centimètre-cube** " " $\frac{1}{1000000}$ " " "

Le mètre cube n'a pas de multiples.

Les subdivisions du mètre cube sont de 1000 en 1000 fois plus petites ; il faut donc 3 chiffres pour exprimer un ordre d'unités.

Le nombre $62^{m^3},425672$ s'énonce 62 mètres cubes, 425 décimètres cubes, 672 centimètres cubes.

Le nombre $2^{m^3},35$ s'énonce 2 mètres cubes, 350 décimètres cubes,

213. Le mètre cube prend le nom de **stère** lorsqu'il sert à la mesure du bois de chauffage. Le *stère* n'a qu'un sous-multiple, le **décistère** qui vaut $\frac{1}{10}$ de stère ; et un multiple le **décastère** qui vaut 10 stères.

D.—*Mesure des capacités.*

214. Les mesures de capacités sont celles qui servent à mesurer les liquides et les matières sèches (blé, etc.).

L'unité de mesure des capacités est le **litre**.

Le litre est la capacité d'un cube ayant 1 décimètre d'arête, c'est-à-dire de 1 décimètre cube

Le *litre* remplace l'ancienne *pinte* pour les liquides et le *litron* pour les denrées sèches.

Les sous-multiples sont :

le **décilitre** qui vaut le $\frac{1}{10}$ du litre

le **centilitre** " " " $\frac{1}{100}$ " "

Les multiples sont :

le **décalitre** qui vaut 10 litres (anciennement le banneau)
l'**hectolitre** " " 100 litres (id le setier)

E.—*Mesure des poids.*

215. L'unité des mesures de poids est le **gramme**.

Le gramme est le poids d'un centimètre cube d'eau distillée à la température de 4° centigrades.

On a choisi 4° centigrades (39.2 Farenheit) parce que, à cette température, l'eau est à son maximum de densité.

On a trouvé que le poids du gramme valait 18,8275 grains anciens et comme la livre ancienne contenait 9216 grains, on reconnaît que le *kilogramme* vaut *2 livres*.

Les sous-multiples du gramme sont :

le **décigramme** qui vaut le $\frac{1}{10}$ du gramme

le **centigramme** " " " $\frac{1}{100}$ " "

le **milligramme** " " " $\frac{1}{1000}$ " "

Les multiples du gramme sont :

le **décagramme** qui vaut 10 grammes
l'**hectogramme** " " 100 "
le **kilogramme** " " 1000 "

100 kilogrammes forment le **quintal métrique** et
1000 " forment la **tonne** ou **tonneau**

F.—*Monnaies décimales.*

216. Nous donnerons quelques renseignements sur les monnaies décimales faisant partie du système métrique et employées en France et en Belgique.

L'unité de ces monnaies est le *Franc* ; c'est un alliage d'argent pesant 5 grammes et contenant 90% d'argent pur et 10% de cuivre.

Les monnaies se divisent en monnaies d'or, d'argent et de bronze.

1° Les monnaies d'or sont :
les pièces de 100, 50, 20, 10 et 5 francs.
la pièce d'or de 5 francs pèse 1,6129 gramme.
les pièces d'or sont au titre de 0,900.

2° Les monnaies d'argent sont :
les pièces de 5, 2 et 1 francs
" " " $\frac{1}{2}$ franc ou 50 centimes (0.50)
" " " $\frac{1}{5}$ de " ou 20 centimes (0.20)

La pièce de 5 francs en argent est au titre de 0,900, c'est-à-dire au titre de l'unité monétaire.

Les autres pièces sont au titre de 0,835.

La pièce de 1 franc n'est donc pas l'unité monétaire ; car, sous le poids de 5 grammes, elle contient 83,5°/₀ d'argent pur au lieu de 90°/₀ et 15,5°/₀ de cuivre au lieu de 10°/₀

3° Les monnaies de bronze sont :

les pièces de 10, 5, 2 et 1 centimes

La pièce de 5 centimes pèse 5 grammes

Il existe de plus, en Belgique, des pièces de 20, 10 et 5 centimes faites avec un alliage de nickel contenant 75°/₀ de nickel et 25°/₀ de cuivre.

Sous le même poids, la valeur légale de la monnaie d'or est 15½ fois celle de la monnaie d'argent et celle-ci 40 fois celle de cuivre.

Un certain nombre d'Etats de l'Europe ont formé l'*Union Monétaire* pour la fabrication des monnaies d'or et d'argent d'après les données d'alliage et de poids ci-dessus, mais sous des noms différents.

N. B.—Le cuivre introduit dans les monnaies d'or et d'argent a pour but :

1° de diminuer l'usure

2° de couvrir les frais de fabrication

3° de faire face à la perte que prépare à l'Etat la refonte des monnaies lorsque, par le fait de l'usage, le poids légal n'existe plus.

4° de percevoir un impôt sur la circulation monétaire

217. Par l'étude des mesures du système métrique, nous pouvons conclure que toutes les mesures dérivent du mètre. Cette seule considération révèle la supériorité de ce système ; celle-ci n'existe, non seulement, dans l'homogénéité et dans la régularité des différentes mesures, mais encore lorsqu'il s'agit de cette partie de l'arithmétique.

Enfin, ce système est fixe, invariable et susceptible d'être adopté dans tous les pays, puisqu'il n'appartient à aucune nation.

§ 2.—Mesure de temps.

218. Le temps est divisé en *jours* et en *années*.

La subdivision du jour indique la *rotation* de la terre autour de son axe ; celle en années indique la révolution de la terre autour du soleil. Cette dernière se fait en 365 jours 5 heures 48 mimutes et 48 secondes (année solaire).

1 jour	contient	24 heures
1 heure	"	60 minutes
1 minute	"	60 secondes

L'heure vaut donc $60 \times 60 = 3600$ secondes

1 jour " " $24 \times 60 = 1440$ minutes

1 année " " $365 \times 24 + 5 = 8765$ heures

§ 3.—Mesures circulaires.

219. Ces mesures sont celles qui s'appliquent à la division du cercle. Toute circonférence se divise en 360 parties égales appelées **degrés** ($^\circ$).

1 degré se divise en 60 **minutes** d'arc ($'$)

1 minute " " " 60 **secondes** " ($''$)

220. Cette division permet, très aisément, de calculer les heures de deux endroits différents du globe, connaissant leur différence de longitude. On sait, par exemple, que Montréal se trouve à $75° 45' 24''$ ouest de Paris ; on demande l'heure qu'il sera à Montréal lorsqu'il marquera midi à Paris.

La terre faisant une révolution complète de $360°$ en 24 heures, elle décrira $15°$ par heure ; donc $1°$ en 4 minutes de temps et $1'$ d'arc en 4 secondes de temps. Donc, pour décrire les $75° 45' 24''$, il faudra $5^h 3'$. Il sera donc $6^h 57'$ du matin lorsqu'à Paris il sonnera midi.

221. Déterminer en degrés, minutes et secondes de circonférence, une base topographique de $760^m 85$.

Le quadrant terrestre vaut 10.000.000 de mètres
donc 10.000.000 de mètres correspondent à 90°

et 1 " " $\frac{90}{10.000.000}$

et 760.85 " " " $\frac{90° \times 760.85}{10.000.000} =$

d'où $760^m 85$ correspondent à $0°,0068465 = 0°,0'20''65$

222. La division de la circonférence en degrés, minutes et secondes étant une division complexe, les savants qui ont imaginé le système métrique des poids et mesures, ont pensé qu'il y aurait un grand avantage à introduire la division décimale dans la mesure des angles.

On a regardé comme unité principale le $\frac{1}{4}$ de la circonférence ou quadrant et cette unité a été divisée en 100 parties que l'on a appelées **grades**, le grade en 100 **minutes** et la minute en 100 **secondes**. Cette division est la **division centésimale**.

La première est appelée, par distinction, la **division sexagésimale**.

223. 100 grades valent 90°

1 " " $\frac{90}{100} = \frac{9}{10}$ de degré

Réciproquement :

90° degrés valent 100 grades

1° " vaut $\frac{100}{90}$ ou $\frac{10}{9}$ de grade

Il est donc très aisé de passer d'un système à l'autre.

Monnaie sterling ou anglaise.

224. Cette monnaie a cours dans la Grande-Bretagne.

Elle se décompose en *Louis* ou *Souverain*
en *shellings*
en *pences* ou *deniers*
et en *farthings*

Tableau des équivalences.

4 farthings (far)	=	1 penny (d)
12 pences (ou deniers)	=	1 shelling (s)
20 shellings	=	1 Louis (£)
21 shellings	=	1 Guinée (G)

Le Louis ou Souverain est aussi appelé la *livre sterling* et vaut $4.866.

24 pences ou deniers, monnaie de cuivre, pèsent 1 livre Avoir-du-poids.

§ 4.—Mesures anciennes.

A.—*Mesures de longueur.*

225. On emploie les deux anciennes mesures, la mesure française et la mesure anglaise, Elles sont toutes les deux aussi complexes l'une que l'autre.

Mes. anglaises		Tableau des équivalences		*Mes. françaises*
1 grain d'orge	= 0,3121 pouces franc.		1 ligne	= 0,089 pouces anglais
3 " "	= 1 pouce (8 lignes)(po)		12 lignes (lg)	= 1 pouce (po)
12 pouces	= 1 pied (pi)		12 pouces	= 1 pied (pi)
3 pieds	= 1 *verge* (ver)		6 pieds	= 1 *toise* (to)
5½ verges	= 1 perche (per)		3 toises	= 1 perche (per)
40 perches	= 1 furlong (fur)		10 perches	= 1 arpent (arp)
8 furlongs	= 1 mille (m)		84 arpents	= 1 lieue (li)
3 milles	= 1 lieue (li)		1000 pieds franç.	= 1068 pieds anglais

1 mille = 5280 pieds anglais = 4944 pieds français

1 pied français=0, mètre 325 — 1 toise=1 mètre 949

Mesures pour les draps.

226. Comme le nom l'indique, ces mesures servent pour le drap et toutes les marchandises qui se vendent à la verge.

Tableau des équivalences.

2¼ pouces	=	1 nail (na)
4 nails ou 9 pouces	=	¼ de verge (qr)
4 quarts ou 36 pouces	=	1 verge (ver)
3 " " ¾ de verge	=	1 aune flamande (A. Fl)
5 " " $\frac{5}{4}$ " "	=	1 " anglais (A. A)
6 " " 1½ verge	=	1 " française (A. Fr)

B.—*Mesures de surface.*

227. On emploie encore les anciennes mesures françaises et les mesures anglaises.

Mesures françaises.		*Mesures anglaises.*	
144 lignes carrés	= 1 pouce²	144 pouces²	= 1 pi² = 0.8767 pi. fr.
144 pouces²	= 1 pied²	9 pieds²	= 1 ver² = 7.8904 " "
36 pieds²	= 1 toise²	30¼ verges²	= 1 per² = 238,6851 " "
9 toises²	= 1 perche²	40 perches²	= 1 vergée² (rood = R) = 29,4673 per. fr.
100 perches²	= 1 arpent²	4 vergées²	= 1 acre² (A) = 1,1787 arp. fr.
7056 arpents²	= 1 lieue² =	640 acres²	= 1 mille² (M. car) = 754,3629 arp. fr.
	= 1.039 lieue ang.	9 milles²	= 1 lieue² (l. car) = 0.9622 li. fr.

C.—*Mesures de volume.*

228. Ces mesures servent aux corps solides et en général à tous les corps ayant 3 dimensions. Les dénominations sont : la *corde*, le *tonneau*, le *pied cube* et le *pouce cube*. On emploie des mesures anglaises et des anciennes mesures françaises.

Mesures françaises.	*Mesures anglaises.*
1728 pouces³ = 1 pied³ (pi. cu.)	1728 pouces³ = 1 pied³ (pi. cu.)
216 pieds³ = 1 toise³ (ts. cu.)	27 pieds³ = 1 verge³ (ver. cu.)
1000 pi³ franç. = 1218,186432 pi³ ang.	40 pi³ de bois en grume } = 1 tonneau (T) 50 pi³ " " de refend }
1000 to³ franç. = 9745,491456 vrg³	16 pi³ = 1 pied de corde (pi. cor.) 8 pi. cor. ou 128 pi³ } = 1 corde (bois à brûler (Cor.)

D.—*Mesures de capacité.*

229. 1° *Mesures pour les liquides.*

1 septier	= 14,4375 pouces cubes	42 gallons	= 1 tiercon (tcn)
2 "	= 1 chopine (cho)	63 "	= 1 barrique (hhd)
2 chopines	= pinte (pint)	84 "	= 1 tonne (ton)
2 pintes	= 1 pot (pt)	126 "	= 1 pipe (pp)
2 pots	= 1 gallon (gal)	252 "	= 1 tonneau (T)
31½ gallons	= 1 baril (brl)	1 tonneau	= 32,6875 pieds cubes

2° *Mesures pour matières sèches.*

Mesures anglaises.		*Mesures impériales.*	
1 chopine	= 33,6003 pouces cubes	1 chopine	= 34,65925 pouces cubes
2 "	= 1 pinte	2 "	= 1 pinte
2 pintes	= 1 pot	4 pintes	= 1 gallon
2 pots	= 1 gallon	2 gallons	= ½ de minot
8 gallons	= 1 minot (min)	4 quarts	= 1 minot (bushel)
8 minots	= 1 setier (set)	8 minots	= 1 setier (quarter)

Minot du Canda.

1 pot = 96 po. cu. français ou 116,94589 po. cu. anglais
20 pots = 1 minot = 2338,91795 pouces cubes anglais

E—*Mesures de poids.*

1° *Poids Avoir-du-poids.*

230. **Le Poids Avoir-du-poids** sert à peser les marchandises tels que sucre, café, thé, farine, etc, ainsi que les métaux, excepté l'or et l'argent.

Il se divise en **tonneau, quintal, quart de quintal, livre, once et dragme.**

Tableau des équivalences.

16 dragmes (dr)	= 1 once (on) ou (oz)
16 onces	= 1 livre (lb)
25 ou 28 livres	= ¼ du quintal (qr)
4 quarts (100 ou 112 lbs)	= 1 quintal (qtl) ou (cwt)
20 quintaux ou 2240 lbs	= 1 tonneau (ton) ou T

La livre légale Avoir-du-poids est le poids de 27,7274 pouces cubes d'eau distillée à la température de 62° F (17 °cent.), le baromètre marquant 30 pouces.

2° *Poids de Troyes.*

231 Le **Poids de Troyes** est employé pour les pesées d'or et d'argent, les bijoux, etc. On l'emploie dans les expressions de chimie et de physique.

Il se divise en **livre, once, gros** et **grain.**

Tableau des équivalences.

24 grains	=	1 gros (gr) ou (pwt)
20 gros	=	1 once (on) ou (oz)
12 onces	=	1 livre (lb)

3° *Poids des pharmaciens.*

232. Le poids des pharmaciens est employé en médecine. Il se divise en livre, once, dragme, scrupule et grain.

Tableau des équivalences.

24 grains (gr)	=	1 scrupule (sc)
3 scrupules	=	1 dragme (dr)
8 dragmes	=	1 once (oz)
12 onces	=	1 livre (lb)

233. *Equivalence entre les différents poids.*

1 lb A. d. P.	=	7000 gr Troyes
1 lb Troyes	=	5760 " "
1 on. " ou de pharmacien	=	480 " "
1 lb A. d. P.	=	437½ " "
175 on. Troyes	=	192 on. A. d. P.
175 lbs Troyes	=	144 lbs A. d. P.

F.—*Mesures d'arpenteurs.*

234. Pour la mesure des terrains et des longueurs, les arpenteurs se servent, en outre des mesures françaises (§ 4—A) d'une **chaîne de quatre perches** ou *66 pieds* (mes. ang.) divisée en 100 chaînons (links) et d'une chaîne de 100 pieds.

Tableau des équivalences.

$7\frac{92}{100}$ pouces	=	1 chaînon (link (l)
25 chaînons	=	1 perche (per)
100 chaînons	=	1 chaîne (ch)
10 chaînes	=	1 furlong (fur)
8 furlongs	=	1 mille (m)
10000 chaînons carrés	=	1 chaîne carré (ch car)
10 chaînes carrés	=	1 acre (A)

CHAPITRE VI.

RAPPORTS ET PROPORTIONS.

---

§ 1.—Définitions.

235. On appelle **rapport**, le résultat de la comparaison de deux nombres de même espèce.

On peut comparer les nombres de deux manières : par soustraction, c'est-à-dire voir de combien un nombre en surpasse un autre, ou par division, c'est-à-dire voir combien de fois un nombre en contient un autre.

De là deux espèces de rapports :

le **rapport par différence** ou arithmétique et

le **rapport par quotient** ou géométrique.

236. Les nombres que l'on compare sont appelés les **termes** du rapport. Le premier est l'**antécédent**, le second le **conséquent**.

Exemple : $36-12=24$ est un rapport par différence

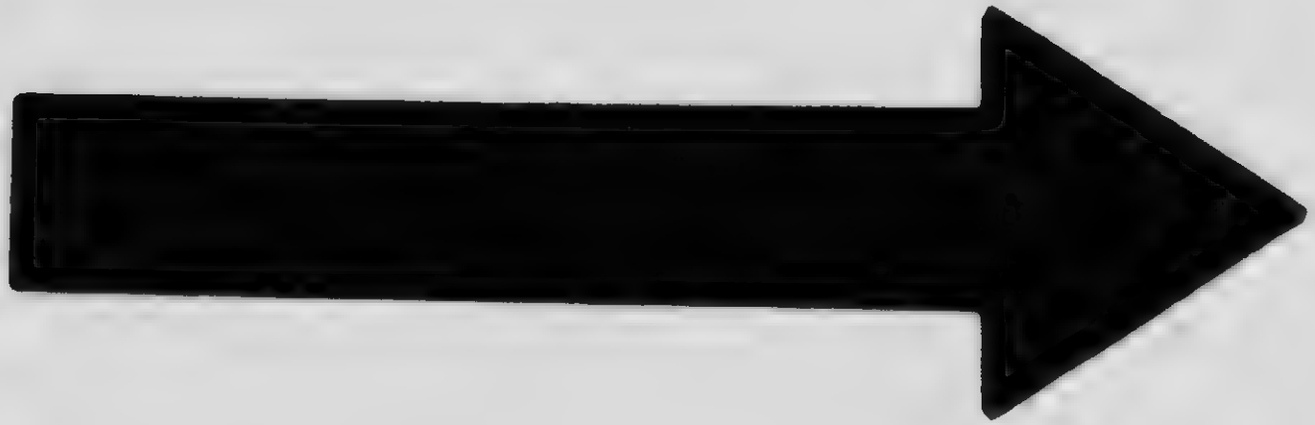
$\frac{36}{12}=3$ " " " par quotient

237 Les rapports par quotient étant les plus employés et d'ailleurs les seuls employés dans les calculs, nous n'étudierons que ceux-là.

238 Deux rapports sont dits **inverses** l'une de l'autre, quand l'antécédent de l'un est le conséquent de l'autre et réciproquement.

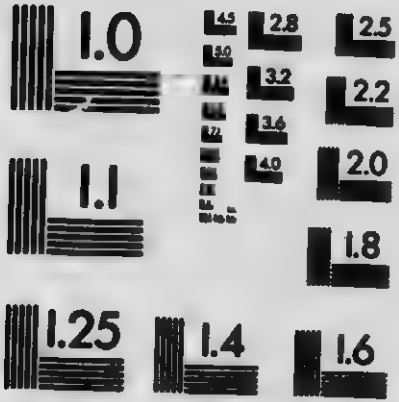
Exemple : $\frac{36}{12}$ et $\frac{12}{36}$

239 De ce que le rapport entre deux nombres est le quotient de ces deux nombres, les propriétés trouvées pour les fractions s'appliquent aux rapports.



MICROCOPY RESOLUTION TEST CHART

(ANSI and ISO TEST CHART No. 2)



APPLIED IMAGE Inc
1653 East Main Street
Rochester, New York 14609 USA
(716) 482 - 0300 - Phone
(716) 288 - 5989 - Fax

240. On appelle **proportion** l'égalité de deux rapports.

Comme il y a deux sortes de rapports, il s'en suit qu'il y a deux sortes de proportions :

les **proportions par différence** ou arithmétiques et

les **proportions par quotient** ou géométriques.

§ 2.—Propriétés des proportions.

241. *Quatre nombres sont dits en proportion, lorsque le rapport de deux d'entre eux est égal au rapport des deux autres* et l'on écrit :

$27:3::36:4$ ou $27:3=36:4$ ou encore et plus communément $\frac{27}{3}=\frac{36}{4}$ que l'on énonce 27 est à 3 comme 36 est à 4.

Le premier et le quatrième termes sont appelés les **extrêmes**. Le deuxième et le troisième sont les **moyens**.

242. Lorsque les deux moyens sont égaux, la proportion est dite **continue** et le terme moyen s'appelle **moyenne proportionnelle**, dans la proportion par quotient, et **moyenne arithmétique**, dans la proportion par différence.

243. Théorème I.—*Dans toute proportion par quotient, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.*

Soit la proportion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ on peut, sans changer la valeur des fractions, multiplier les deux termes par une même quantité.

Multipliant les deux termes de $\frac{a}{b}$ par d et les deux termes de $\frac{c}{d}$ par b ; il vient :

$$\frac{a\times d}{b\times d}=\frac{c\times b}{d\times b}$$

Ces deux fractions étant égales et ayant les dénominateurs égaux, il s'ensuit que les numérateurs le sont également, d'où $a\times d=b\times c$ c. q. f. d.

244. Théorème II.—*Réciproquement, si quatre nombres sont tels que le produit de deux d'entre eux est égal à celui des deux autres, ces quatre nombres sont en proportion.*

Si $a \times d = b \times c$ on en déduit en divisant les 2 membres par $b \times d$:

$$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{b \times c}{b \times d} \quad \text{d'où :}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \text{c. q. f. d.}$$

245. Cette propriété permet de déterminer un terme quelconque d'une proportion connaissant les 3 autres.

Le théorème I permet également de dire qu'on peut changer l'ordre des termes d'une proportion pourvu qu'on conserve les mêmes extrêmes et les mêmes moyens, de sorte que le produit des extrêmes soit toujours égal au produit des moyens.

246. On appelle **quatrième proportionnelle** à trois nombres donnés A, B, C un quatrième nombre x tel que

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{x} \quad \text{d'où} \quad A \times x = B \times C \quad \text{et} \quad x = \frac{B \times C}{A}$$

Donc pour trouver une quatrième proportionnelle on divise le produit des moyens par l'extrême connu.

On appelle **troisième proportionnelle** à deux nombres donnés A et B un nombre x tel que

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{x} \quad \text{d'où} \quad A \times x = B^2 \quad x = \frac{B^2}{A}$$

Si le terme inconnu est tel que

$$\frac{A}{x} = \frac{x}{B} \quad \text{alors} \quad x^2 = A \times B \quad \text{d'où} \quad x = \sqrt{A \times B}$$

Ce nombre x est alors appelé **moyenne proportionnelle** entre A et B.

Donc la moyenne proportionnelle entre deux nombres est égale à la racine carrée du produit de ces deux nombres.

247. Théorème III.—*Dans toute proportion, la somme ou la différence des deux premiers termes est à la somme ou à la différence des deux derniers, comme le 1er est au 3e ou comme le 2e est au 4e.*

Soit la proportion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ Ajoutons ou retranchons l'unité aux deux membres de l'égalité, il vient :

$$\frac{a}{b}\pm 1=\frac{c}{d}\pm 1 \quad \text{ou}$$

$$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$$ ou encore en intervertissant

l'ordre des moyens $\frac{a\pm b}{c\pm d}=\frac{b}{d}$ Et comme $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ on a :

$$\frac{a\pm b}{c\pm d}=\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$ c. q. f. d.

248. Théorème IV.—*Dans toute proportion, la somme des deux premiers termes est à leur différence, comme la somme des deux derniers est à leur différence.*

Soit $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Le théorème précédent donne :

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{c} \quad \text{et} \quad \frac{a-b}{c-d}=\frac{a}{c}$$

A cause du rapport commun $\frac{a}{c}$, il vient :

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}$$ ce qui peut s'écrire :

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$ c. q. f. d.

249. Théorème V.—*Dans toute proportion, la somme ou la différence des antécédents est à la somme ou la différence des conséquents comme un antécédent est à son conséquent.*

Soit $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ce qui peut s'écrire :

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$ et d'après le théorème III

$$\frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$ c. q. f. d.

250. Théorème VI.—*Si on multiplie plusieurs proportions terme à terme, les 4 produits forment une proportion.*

Soient $\frac{3}{6}=\frac{4}{8}$; $\frac{5}{15}=\frac{9}{27}$; $\frac{6}{18}=\frac{7}{21}$ d'où l'on tire :

$$\frac{3\times5\times6}{6\times15\times18}=\frac{4\times9\times7}{8\times27\times21} \text{ ou } \frac{1}{18}=\frac{1}{18}$$

251. Théorème VII.—*Dans une suite de rapports égaux la somme des antécédents est à la somme des conséquents comme un antécédent est à son conséquent.*

Soit la suite $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\ldots$

La proportion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ nous donne $\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$

Mais $\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ donc $\frac{a+c}{b+d}=\frac{e}{f}$ et alors

$\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{e}{f}$ et comme $\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$ on a :

$\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{g}{h}$ et alors enfin

$$\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}=\frac{g}{h} \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Des moyennes.

252. Moyenne arithmétique.

Soit $a>b$ on aura $2a>a+b$ et $2b<a+b$

Donc $b<a+b<2a$ donc aussi $b<\frac{a+b}{2}<a$

Cette expression $\frac{a+b}{2}$ est appelée *moyenne arithmétique* ; elle est plus grande que le plus petit nombre et plus petite que le plus grand.

253. Moyenne géométrique.

Soit $a>b$ on a $a^2>ab$ et $b^2<ab$

D'où $b^2<ab<a^2$ d'où aussi

$$b<\sqrt{ab}<a$$

Cette expression $\sqrt{ab}$ est appelée *moyenne géométrique.*

254. *La moyenne arithmétique entre deux nombres est plus grande que leur moyenne géométrique.*

Soient $\frac{a+b}{2}$ et $\sqrt{ab}$ ces deux moyennes et supposons que $a>b$; on peut alors écrire $a=b+d$ et dès lors

$$\sqrt{ab}=\sqrt{(b+d)b}=\sqrt{b^2+bd} \quad (1)$$

On a aussi $\frac{a+b}{2}=\frac{b+d+b}{2}=\frac{2b+d}{2}=b+\frac{d}{2}$ (2)

Elevons (1) et (2) au carré, il vient :

$$\left(\sqrt{ab}\right)^2=ab=b^2+bd \quad (3) \quad \text{et}$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\left(b+\frac{d}{2}\right)^2=b^2+bd+\frac{d^2}{4} \quad (4)$$

Comparant (3) et (4) on voit que

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2>\left(\sqrt{ab}\right)^2 \qquad \text{c'est-à-dire que}$$

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab} \qquad \text{c. q. f. d.}$$

§ 3.—Application des proportions.

255. Des grandeurs liées entre elles de telle sorte que la variation de valeur de l'une entraîne la variation des valeurs des autres sont dites *proportionnelles.*

Les grandeurs proportionnelles conduisent à des opérations connues sous le nom de *Règles de trois, de mélange* et *d'alliage, de partage, de société, d'intérêt* et *d'escompte.*

A.—Règle de trois simple.

256. *Problème.*—8 ouvriers ont mis 20 jours pour faire un certain travail. Combien faudrait-il d'ouvriers pour faire le même travail en 4 jours ?

Si travaillant pendant 20 jours, il a fallu 8 ouvriers pour faire un certain travail ; pour faire ce même travail en 1 jour, il faudra 20 fois plus d'ouvriers ;
et pour faire ce travail en 4 jours, il faudra 4 fois moins d'ouvriers que pour le faire en 1 jour ou $\frac{8\times20}{4}=40$

Réponse : 40 ouvriers.

257. Règle de trois composée

Problème.—Combien 14 ouvriers feront-ils de verges d'un certain travail en travaillant pendant 7 jours, 10 heures par jour ; si 8 ouvriers en ont fait 146 verges en 10 jours en travaillant 8 heures par jour ?

8 ouv. trav. pendant 10 jours à 8 hrs par jour font 146 verges

1	"	"	"	10	"	8	"	"	"	$\frac{146}{8}$
14	"	"	"	10	"	8	"	"	"	$\frac{146\times14}{8}$
14	"	"	"	1	"	8	"	"	"	$\frac{146\times14}{8\times10}$
14	"	"	"	7	"	8	"	"	"	$\frac{146\times14\times7}{8\times10}$
14	"	"	"	7	"	1	"	"	"	$\frac{146\times14\times7}{8\times10\times8}$
14	"	"	"	7	"	10	"	"	"	$\frac{146\times14\times7\times10}{8\times10\times8}$

Réponse $=233\frac{9}{16}$ verges

B.—Règle de mélange.

258. La Règle de mélange a pour but :

1° *De déterminer la valeur moyenne d'un mélange* de plusieurs substances de valeurs différentes, lorsque l'on connaît la quantité de chaque substance qui entre dans le mélange et la valeur particulière de chacune d'elles.

2° *De déterminer la quantité de chaque substance* qui entre dans un mélange, lorsque l'on connaît la valeur particulière de chacune et la valeur moyenne du mélange.

259. *Problème I.*—Un homme a mélangé 25 minots de pois à 6 sous le minot, avec 15 minots de blé à 4 sous et 20 minots d'avoine à 3 sous. Quel est le prix d'un minot de ce mélange ?

Si 1 minot de pois coûte 6s, 25 minots coûtent 150 sous
1 " " blé " 4s, 15 " " 60 "
1 " d'avoine " 3s, 20 " " 60 "

Le mélange contient 60 " et coûte 270 "
donc 1 " " $\frac{270}{60}$ =

Réponse : 4 sous 6 deniers

Donc pour trouver le prix moyen d'un mélange, il faut multiplier le prix de chaque substance qui y entre par sa quantité respective, puis diviser la somme des produits par la quantité totale du mélange.

260. *Problème II.*—On a acheté du vin à 3 francs le litre et du vin à 1fr.75 le litre. Combien doit-on prendre de litres de l'un et de l'autre pour faire un mélange de 200 litres à 2.30 fr. le litre ?

Vin de 3 frs. donne une perte de 70
Vendu à 2.30
Vin de 1.75 " donne un gain de 55
125

La perte devant être compensée par le gain, il faut sur 125 litres (par exemple) de mélange prendre
70 litres de vin à 1.75
55 " " " " 3.00

Sur 1 litre de mélange, on prendra $\begin{cases} \frac{70}{125} \text{ à } 1.75 \\ \frac{55}{125} \text{ " } 3.00 \text{ et} \end{cases}$

Sur 200 litres de mélange il faut prendre :

$$\begin{cases} \frac{70 \times 200}{125} = 112 \text{ litres à } 1.75 \\ \frac{55 \times 200}{125} = 88 \text{ " " } 3.00 \end{cases}$$

Il n'y a ni perte ni gain, puisque

	200	litres à	2 30	donne	460	francs.
et	112	" "	1.75	"	196.00	"
	88	" "	3.00	"	264.00	"
				Vérification	460,00	francs

C.—Règle d'Alliage.

261. Lorsque le mélange a pour objet de résoudre des questions relatives à la réunion de métaux, intimement mêlés par la fusion, la règle de mélange prend le nom de règle d'alliage, et particulièrement *amalgame* quand l'un d'eux est du *mercure*. On désigne sous le nom de titre d'un alliage le rapport de la quantité de métal pur au poids total. Ainsi de l'or est au titre de 0,980 lorsque, sur 1000 grammes, par exemple, d'un lingot d'or à ce titre, il y a 980 grammes d'or pur.

262. Les problèmes d'alliage se traitent identiquement comme ceux de mélange.

On a deux lingots, le premier au titre de 0,885, le second au titre de 0,950. Combien faut-il de grammes à chaque lingot pour former un alliage de 1500 grammes au titre de 0,900 ?

885		15	augmentation du titre
	900		
650		50	diminution du titre
		65	

La perte doit être compensée par l'augmentation, il faut donc :

Sur 65 gram. de mélange prendre $\begin{cases} 15 \text{ gr. à } 0,950 \text{ et} \\ 50 \text{ " " } 0,885 \end{cases}$

Sur 1 gramm. de mélange, il faut $\begin{cases} \frac{15}{65} \text{ " " } 0{,}950 \\ \frac{50}{65} \text{ " " } 0{,}885 \end{cases}$

Et sur 1500 gr. de mélange, il faut $\begin{cases} \frac{15\times1500}{65} \text{ gr. à } 0{,}950 \\ \frac{50\times1500}{65} \text{ " " } 0{,}885 \end{cases}$

On prendra donc $346\frac{2}{13}$ grammes à 0,950

et $1153\frac{11}{13}$ " " 0,885

D. — Partages Proportionnels.

263. On a souvent à partager une grandeur en parties proportionnelles à des nombres donnés. Ce problème se présente lorsque, par exemple, plusieurs personnes forment une société ; les bénéfices et les pertes se partagent proportionnellement à la mise de chacun.

264. *Problème.*

Partager 360 en 3 parties proportionnelles aux nombres 2, 3, 4.

Soient x, y, z, les 3 parties inconnues. On peut écrire

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$$

Appliquant une propriété des proportions (222), il vient :

$$\frac{x+y+z}{2+3+4}=\frac{x}{2} \qquad \text{Mais } x+y+z=360, \text{ donc}$$

$$\frac{360}{9}=\frac{x}{2} \qquad \text{d'où} \qquad x=\frac{2\times360}{9}=80,$$

De même

$$\frac{360}{9}=\frac{y}{3} \qquad \text{d'où} \qquad y=\frac{3\times360}{9}=120$$

$$\text{et } \frac{360}{9}=\frac{z}{4} \qquad \text{d'où} \qquad z=\frac{4\times360}{9}=160$$

265. Partager 327 en 3 parties proportionnelles à $\frac{2}{3}$, 6, $\frac{7}{8}$.

Soient x, y, z, les 3 parties. On aura

$$\frac{x}{\frac{2}{3}}=\frac{y}{6}=\frac{z}{\frac{7}{8}} \quad \text{d'où (222)} \quad \frac{x+y+z}{\frac{2}{3}+6+\frac{7}{8}}=\frac{x}{\frac{2}{3}}=\frac{y}{6}=\frac{z}{\frac{7}{8}}$$

$$\frac{327}{\frac{181}{24}}=\frac{x}{\frac{2}{3}} \qquad \frac{24\times327}{181}=\frac{3x}{2} \qquad 3x=\frac{2\times24\times327}{181} \qquad \text{d'où}$$

$$x=\frac{2\times24\times327}{181\times3}=28\frac{164}{181} \text{ de même}$$

$$y=\frac{24\times327\times6}{181}=260\frac{28}{181}$$

$$z=\frac{24\times327\times7}{181\times8}=37\frac{170}{181}$$

E.—Règles de société.

Règle de société simple.

266. Ce cas est celui où les mises sont restées pendant le même temps dans une société ; les bénéfices ou les pertes sont alors proportionnels aux mises.

267. *Problème.*—Trois personnes s'associent pour faire un commerce. La première fournit une mise de $900, la seconde $1200 et la troisième $1500. Au bout de l'année, le bénéfice est de $504. Quelle est la part de bénéfice de chacune d'elles ?

Soient x, y, z les parts inconnues :

Elles sont proportionnelles aux mises, donc

$$\frac{x}{900}=\frac{y}{1200}=\frac{z}{1500}$$

Appliquons le N° 222, il vient :

$$\frac{x+y+z}{900+1200+1500}=\frac{x}{900}=\frac{y}{1200}=\frac{z}{1500}$$

Mais $x+y+z=504$ donc

$$\frac{504}{3600}=\frac{x}{900} \qquad \text{d'où } x=\$126$$

$$\frac{504}{3600}=\frac{y}{1200} \quad \text{d'où } y=\$168$$

$$\frac{504}{3600}=\frac{z}{1500} \quad \text{d'où } z=\$210$$

Règle de société composée.

268. Ce cas est celui où les mises et les temps sont inégaux. Alors les parts sont proportionnelles aux produits des mises par les temps.

En effet, une certaine somme x placée pendant un certain temps t équivaut à une somme $t \times x$ placée pendant un temps *1*.

269. *Problème.*—Trois associés ont mis dans une entreprise : le premier 8000 francs pendant 10 mois, le second 12000 francs pendant 6 mois, et le troisième 5000 francs pendant 13 mois. Le bénéfice a été de 17360 francs. Quelle est la part qui revient à chacun ?

Le premier associé ayant mis 8000 francs pendant 10 mois, on peut considérer qu'il a mis $8000 \times 10 = 80000$ francs, pendant 1 mois. De même pour le second et le troisième qui, dans ces conditions auraient mis pendant 1 mois, respectivement 72000 et 65000 frs.

Nous retombons alors dans le cas précédent et on trouvera pour les parts :

1er $\frac{17360}{217000}=\frac{x}{80000}$ d'où $x=6400$ frs.

2d $\frac{17360}{217000}=\frac{y}{72000}$ " $y=5760$ frs.

3e $\frac{17360}{217000}=\frac{z}{65000}$ " $z=5200$ frs.

270. Nous verrons, en étudiant les questions d'intérêts, comment on doit interpréter le cas de la règle de société composée, en ayant égard aux intérêts de chacun des associés, intérêts variant proportionnellement au temps pendant lequel la part a été laissée en participation.

CHAPITRE VII.

DES PROGRESSIONS ET DES LOGARITHMES.

§ 1.—Des progressions.

271. On appelle **progression** une suite de nombres tels que le rapport entre deux termes consécutifs est constamment le même.

Comme il y a deux sortes de proportion il y a deux sortes de progressions :

1° Les *progressions par différence* ou arithmétiques.

2° Les *progressions par quotient* ou géométriques.

A.—Progressions arithmétiques.

272. On appelle *progression arithmétique* ou par différence, une suite de nombres tels que chacun d'eux surpasse celui qui le précède ou en est surpassé d'une quantité constante appelée **raison de la progression.**

Ces différents nombres s'appellent les **termes** de la progression.

273. Pour indiquer que des nombres font partie d'une progression arithmétique, on les écrit les uns à la suite des autres en les séparant par un point et en les faisant précéder du signe +

Exemple : + 4. 7. 10 13. 16. 19. 22.....

274. La progression est **croissante** lorsque les termes vont en croissant : *la raison est alors positive.*

La progression est **décroissante** lorsque les termes vont en décroissant : *la raison est alors négative.*

275. En général, nous désignerons les termes d'une progression arithmétique par les lettres $a.\,b.\,c\ldots.i.\,k.\,l$, la raison positive ou négative par r et le nombre des termes par n.

$$+\,a.\,b.\,c\ldots.i.\,k.\,l.$$

276. Théorème I.—*Dans toute progression arithmétique, un terme de rang quelconque est égal au premier plus autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui.*

D'après la définition des progressions

le 2e terme $b=a+r$

le 3e terme $c=b+r=a+r+r=a+2r$

le 4e terme $d=c+r=a+2r+r=a+3r$

et ainsi de suite. En général, le terme l qui en a $(n-1)$ devant lui est donc égal à :

$$l=a+(n-1)r \qquad (1)$$

Cette formule permet de déterminer un des éléments a, l, n, ou r quand les 3 autres sont donnés.

En effet, on tire : de (1) $a=l-(n-1)r$ (2)

$$r=\frac{l-a}{n-1} \qquad (3)$$

$$(n-1)=\frac{l-a}{r} \qquad \text{d'où} \qquad n=\frac{l-a}{r}+1 \qquad (4)$$

277. Exemple.— Soit la progression arithmétique

$$+2.\,6.\,10.\,14.\,18\ldots.$$

1° Trouver le 20e terme de cette progression.

La formule (1) donne $l=a+(n-1)r$ dans laquelle $a=2$, $n=20$ et $r=4$ d'où

$$l=2+(19)4=78$$

2° Trouver la raison d'une progression arithmétique, dont le 1er terme est 2, le dernier 78 et le nombre de termes $=20$

La formule (3) donne $r=\frac{l-a}{n-1}=\frac{78-2}{19}=4$

3° Trouver le nombre des termes d'une progression arithmétique dont le 1e terme $=2$; le dernier $=78$ et la raison $=4$

La formule (4) donne $n=\frac{l-a}{r}+1=\frac{78-2}{4}+1=20$

278. Théorème II.—*Dans toute progression arithmétique limitée, la somme de deux termes à égale distance des extrêmes est constante et égale à la somme des extrêmes.*

Soit la progression $+a.b.c.....x.....y.....i.k.l.$

x ayant p termes devant lui et

y ayant p termes après lui.

D'après les formules (1) et (2) on a :

$$x=a+pr \qquad (m)$$
$$y=l-pr \qquad (n)$$

Ajoutons (m) et (n), il vient : $x+y=a+l$ (5)

279. Théorème III.—*La somme des termes d'une progression arithmétique est égale au produit de la demi-somme des termes extrêmes par le nombre des termes.*

Soit la progression $+a.b.c.....i.k.l.$ et n le nombre des termes. Appelons S la somme, il vient :

$$S=a+b+c+....i+k+l \text{ et}$$

aussi $$S=l+k+i+....c+b+a$$

Ajoutons ces deux égalités membre à membre.

$$2S=(a+l)+(b+k)+(c+i)+....(i+c)+(k+b)+(l+a)$$

Or les différentes parties $(a+l)$, $(b+k)$....sont toutes égales à $(a+l)$ (*Théorème II.*) Leur nombre est celui des termes de la progression c'est-à-dire$=n$.

On aura donc $2S=(a+l)n$ d'où

$$S=\frac{(a+l)n}{2} \qquad (6)$$

279bis. Autre forme de la valeur de S.

Remplaçons dans (6), l par sa valeur $a+(n-1)r$ il vient :

$$S=\frac{a+a+(n-1)r}{2}\times n=\frac{2a+(n-1)r}{2}\times n$$

Cette forme est utile lorsqu'on ne donne pas le dernier terme de la progression et que l'on connaît le 1er terme, la raison et le nombre des termes.

Elle évite la recherche de l.

Insertion de moyens arithmétiques.

280. *Insérer un certain nombre de moyens arithmétiques entre deux nombres donnés, c'est former une progression par différence dont les nombres donnés soient les termes extrêmes et dont les moyens insérés soient les termes intermédiaires.*

Supposons que l'on demande d'insérer m moyens arithmétiques entre 2 nombres a et b. La question revient à chercher la raison de la progression dans laquelle il y aurait $(m+2)$ termes. Or, la formule $l=a+(n-1)r$ nous donne pour ce cas, $b=a+(m+1)r$ d'où l'on tire $r=\frac{b-a}{m+1}$ (7)

On obtient donc la raison de la progression en divisant la différence entre les 2 nombres donnés par le nombre des moyens à insérer plus un.

281 Théorème III.—*Si entre deux termes consécutifs d'une progression arithmétique, on insère le même nombre de moyens, les progressions partielles ainsi obtenues forment une seule et même progression.*

Soit à insérer m moyens arithmétiques entre

a et b, b et c, c et d.....de la progression

$+a.\,b.\,c\,d$.....dont la raison est r

Les raisons des progressions partielles sont, en vertu de la formule (7)

$$\frac{b-a}{m+1}=\frac{c-b}{m+1}=\frac{d-c}{m+1}=\ldots\ldots=\frac{r}{m+1}$$

D'ailleurs, le dernier terme de chacune de ces progressions est le premier terme de la suivante. Donc on peut considérer cette suite de progressions comme n'en formant qu'une seule.

Applications

282 I. Trouver la somme des 32 premiers termes de la progression $+2.\,6.\,10.\,14\,18\ldots\ldots$

L'application de la formule (6) nous donne

$$S=\frac{a+l}{2}.\,n$$

Il faut donc d'abord rechercher le dernier terme.

On a en vertu de (1) $l=a+(n+1)r=2+31\times 4=126$

D'où $$S=\frac{2+126}{2}\times 32=2048$$

II. Soit à insérer 10 moyens arithmétiques entre 5 et 38

La raison de la progression est donnée par

$$r=\frac{b-a}{m+1}=\frac{38-5}{10+1}=\frac{33}{11}=3$$

La progression est

$$\div 5.\ 8.\ 11.\ 14.\ 17\ldots\ldots 32.\ 35.\ 38.$$

B.—Progressions Géométriques.

283. On appelle *progression géométrique* ou par quotient une suite de nombres dont chacun est égal au précédent multiplié par un nombre constant que l'on appelle **la raison de la progression.**

284. Lorsque la raison est *plus grande que l'unité* les termes vont en croissant et la progression est **croissante.**

Lorsque la raison est *plus petite que l'unité,* les termes vont en décroissant et la progression est **décroissante.**

285. Pour indiquer que des nombres font partie d'une progression par quotient, on les écrit les uns à la suite des autres en les séparant par 2 points et en les faisant précéder du signe $\div$

286. En général, nous désignons les termes d'une progression géométrique par $a, b, c\ldots\ldots i, k, l$; par n le nombre des termes et par q la raison, de sorte que l'on aura.

$$\div a:b:c\ldots\ldots i:k:l. \qquad (1)$$

287. Théorème 1.—*Dans toute progression géométrique, un terme de rang quelconque est égal au premier terme multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui précèdent.*

Soit une progression (1). D'après la définition des progressions géométriques on a :

le 2e terme $b=aq$
le 3e " $c=bq=aq^2$
le 4e " $d=cq=aq^3$ et ainsi de suite
.....le n^e " $l=aq^{n-1}$ (2)

Cette formule (2) nous permet de déterminer l'une des quantités a, b, q, n connaissant les 3 autres.

$$l=aq^{n-1}$$

$$a=\frac{l}{q^{n-1}} \qquad (3)$$

$$q=\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}} \qquad (4)$$

La formule donnant la valeur de n ne peut être résolue qu'à l'aide des principes sur la théorie des logarithmes.

288 Théorème II.—*Les termes d'une progression géométrique décroissante tendent vers zéro.*

La raison, étant plus petite que l'unité, peut être représentée par $\frac{1}{q}$, par exemple, et alors un terme qui en a n avant lui est représenté par

$$l=a\times\left(\frac{1}{q}\right)^n=\frac{a}{q^n}$$

Si le nombre des termes croît indéfiniment, le facteur q^n devient infiniment grand, et par suite, la fraction $\frac{a}{q^n}$ devient infiniment petite et se rapproche d'autant plus de zéro que le nombre des termes est plus grand.

289. Théorème IV.—*Dans toute progression géométrique le produit de deux termes à égale distance des extrêmes est égal au produit des extrêmes.*

Soit la p. g. $+a:b:c\ldots\ldots x\ldots\ldots y\ldots\ldots i:k:l.$
dans laquelle x a p termes devant lui et y, p termes après lui.

En vertu des formules (2) et (3) on a :

$$x = aq^p$$

$$y = \frac{l}{q^p}$$

Multiplions membre à membre ces deux égalités, il vient :

$$xy = \frac{aq^p l}{q^p} = al \quad (5)$$

290. Théorème V.—*Le produit des termes d'une progression géométrique est égal à la racine carrée du produit des extrêmes élevé à une puissance marquée par le nombre des termes de la progression.*

Soit la p. g. $+a:b:c\ldots.i:k:l$. de n termes.

Appelons P le produit des termes.

$$P = a \times b \times c \ldots . i \times k \times l \quad \text{et aussi}$$

$$P = l \times k \times i \ldots . c \times b \times a$$

Multiplions membre à membre, il vient :

$$P^2 = (al) \times (bk) \times (ci) \ldots . (ic) \times (kb) \times (la)$$

Or les produits entre parenthèses sont égaux entre eux et à (al) (*Théorème IV*) et, comme ils sont en nombre $= n$, on a :

$$P^2 = (al)^n \quad \text{d où} \quad P = \sqrt{(al)^n} \qquad (6)$$

291. Théorème VI.—*La somme des termes d'une progression par quotient est égale à une fraction dont le numérateur est l'excès du produit du dernier terme par la raison sur le 1er terme, et le dénominateur l'excès de la raison sur l'unité.*

Soit S la somme de la progression

$$S = a + b + c + \ldots . i + k + l \qquad (1)$$

Multiplions les 2 membres de cette égalité par q, il vient :

$$Sq = aq + bq + cq + \ldots . iq + kq + lq. \qquad (2)$$

mais $\quad aq = b,\ bq = c\ ;\ cq = d\ ;\ldots . iq = k\ ;\ kq = l$

Et alors (2) devient :

$$Sq = b + c + d \ldots . + k + l + lq \qquad (3)$$

Retranchant (1) de (3) il vient :

$$Sq - S = lq - a$$

$$S(q-1) = lq - a \qquad S = \frac{lq-a}{q-1} \qquad (7)$$

291bis. Autre forme de la valeur de S.

Remplaçons dans (7), l par sa valeur aq^{n-1}, il vient :

$$S = \frac{aq^{n-1} \times q - a}{q-1} = \frac{aq^n - a}{q-1} = \frac{a(q^n-1)}{q-1} \qquad (7)$$

Cette forme est utile lorsqu'on ne donne pas le dernier terme de la progression. Elle évite la recherche de l.

Remarque.—Si la progression est décroissante, la formule devient $S = \frac{a-lq}{1-q}$ qui tend vers la limite $S = \frac{a}{1-q}$ (8) lorsque la progression décroît infiniment.

Insertion de moyens géométriques.

292. *Insérer un certain nombre de moyens géométriques, entre deux nombres donnés, c'est former une progression par quotient, dont les deux nombres donnés soient les extrêmes et dont les moyens insérés soient les termes intermédiaires.*

Soit à insérer m moyens entre deux nombres a et b.

La progression ainsi formée a donc $(m+2)$ termes dont a et b sont les extrêmes ; la raison de cette progression est donc $q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$ (formule 4).

On obtient donc la raison en extrayant du quotient des deux nombres donnes une racine ayant pour indice le nombre des moyens à insérer plus un.

293. Théorème VII.—*Si entre deux termes consécutifs d'une progression géométrique, on insère le même nombre de moyens, les progressions partielles ainsi obtenues forment une seule et même progression.*

Supposons que l'on ait à insérer m moyens entre chacun des termes $a, b, c \ldots$ d'une progression géométrique.

La raison de la prog. entre a et b est $q' = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$

" " " " b " c " $q'' = \sqrt[m+1]{\frac{c}{b}}$

" " " " c " d " $q''' = \sqrt[m+1]{\frac{d}{c}}$

et ainsi de suite.

Or $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = \ldots = q$ donc $q' = q'' = q''' = \ldots = \sqrt[m+1]{q}$ (9)

D'ailleurs le dernier terme de chacune de ces progressions est aussi le 1er terme de la suivante. On peut donc considérer toutes ces progressions comme n'en formant qu'une seule.

Applications.

294. Soit la progression géométrique

$$+2:6:18:54:162\ldots\ldots$$

1° Trouver le 12e terme de cette progression.

La raison $=3$ et où a $l = 2 \times 3^{11} = 354294$

2° Le dernier terme d'une progression géométrique étant 354294, la raison 3 et le nombre de termes 12, donner le 1er terme

$$a = \frac{l}{q^{n-1}} = \frac{354294}{177147} = 2$$

3° Déterminer la somme des 12 termes de la progression.

$$S = \frac{lq - a}{q - 1} = \frac{354294 \times 3 - 2}{3 - 1} = 531440$$

---

§ 2.—Des logarithmes.

A.—Définitions et considérations générales.

295. Définition arithmétique.

Etant données deux progressions, l'une géométrique commençant par l'unité, l'autre arithmétique commençant par

séro, les termes de la progression arithmétique sont appelés les logarithmes des termes de la progression géométrique.

Les progressions, ainsi écrites, forment un **système de logarithmes**, et elles ne sont assujetties qu'à la seule condition de commencer, la première par 1, la seconde par 0.

296. On voit donc qu'il y a une infinité de systèmes de logarithmes, puisqu'on peut considérer une infinité de systèmes remplissant cette unique condition.

Nous ne considèrerons dans les calculs que le système des **logarithmes vulgaires**, appelées aussi *logarithmes de Briggs* et qui a pour **base** 10 qui est la base du système de numération décimale.

297. On appelle **base** d'un système de logarithmes le nombre de la progression par quotient correspondant à l'unité de la progression arithmétique. La base est donc le nombre qui a pour logarithme *1*.

298. Le *système de Briggs* ou *système de logarithmes vulgaires* est défini par les progressions suivantes :

$$+1 : 10 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : \ldots$$

$$+0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots\ldots$$ on voit que :

le logarithme de $1=0$
" " $10=1$
" " $10^2=2$ et ainsi de suite ;

et, en général : logarithme de $10^n=n$; et l'on écrit :

$$\log. 1=0$$
$$\log. 10=1$$
$$\log. 100=2$$ et, en général, une puissance de 10 a pour logarithme son exposant.

299. Définition algébrique par la fonction exponentielle.

On peut encore définir les logarithmes d'un nombre donné *dans le système décimal* : le nombre auquel il faut élever la base 10 pour reproduire le nombre donné. En général, le logarithme d'un nombre, dans une base quelconque B, est l'exposant auquel il faut élever cette base pour reproduire le nombre donné.

300. D'après le § 269, on voit que les puissances entières de 10 seules ont des logarithmes entiers ; les logarithmes de tous les autres nombres entiers ou fractionnaires sont incommensurables. Ils ont été calculés en décimales. La partie entière du logarithme s'appelle la **caractéristique**, et la partie décimale s'appelle la **mantisse**.

Les nombres compris entre 1 et 10 ont des logarithmes compris entre 0 et 1 : leur caractéristique est donc *0*.

Ceux compris entre 10 et 100 ont des logarithmes compris entre 1 et 2 : leur caractéristique est donc *1*.

En général, les nombres compris entre 2 puissances de 10 ont pour caractéristique l'indice de la plus petite de ces puissances.

Donc, *la caractéristique d'un logarithme contient autant d'unités* **moins une** *qu'il a de chiffres dans le nombre.*

Exemple : le nombre 8964 ayant 4 chiffres aura le chiffre 3 pour caractéristique, parce qu'il est compris entre 10^3 et 10^4 dont les logarithmes sont 3 et 4

B.—Propriétés des logarithmes

301. Théorème I.—*Le logarithme d'un produit de plusieurs facteurs est égal à la somme des logarithmes de ces facteurs.*

Soient a et b deux nombres faisant partie d'une progression géométrique croissante, ayant respectivement m et n termes devant eux.

On aura $a=q^m$

$b=q^n$ le 1er terme de la progression étant 1

D'où $a \times b = q^{m+n}$

Supposons que mr et nr soient les termes de la progression arithmétique correspondants à q^m et q^n de la progression géométrique : On aura

$$\log a = mr$$

$$\log b = nr \qquad \text{D'où}$$

$$\log a + \log b = mr + nr = r(m+n)$$

Or le terme $(m+n)r$ est, dans la progression arithmétique, le logarithme du terme q^{m+n} de la progression géométrique.

Alors $\log q^{m+n} = (m+n)r$ Et par suite

$$\log (a \times b) = \log a + \log b.$$

302 Théorème II. —*Le logarithme d'un quotient est égal à la différence des logarithmes du dividende et du diviseur.*

Soit $\frac{a}{b} = Q$ le quotient donné, d'où $a = bQ$.

En vertu du théorème I, on a : $\log a = \log b + \log Q$ d'où :

$\log Q = \log a - \log b$ c'est-à-dire $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$

303. Théorème III.—*Le logarithme d'une puissance d'un nombre est égal au logarithme du nombre multiplié par l'exposant de la puissance.*

Soit a^m une puissance dont il faut chercher le logarithme.

On a $a^m = a \times a \times a \times a \ldots\ldots$ (répété m fois)

En vertu du théorème I, on a :

$\log a^m = \log a + \log a + \log a \ldots\ldots$ répété m fois)

Donc $\log a^m = m \log a$

304. Théorème IV.—*Le logarithme de la racine d'un nombre est égal au logarithme du nombre divisé par l'indice du radical.*

Soit $\sqrt[m]{a} = b$ d'où $a = b^m$ et par suite du *Théorème III*

$$\log a = m \log b \quad \text{d'où}$$

$$\log b = \frac{\log a}{m}$$

Or, $\log b = \log \sqrt[m]{a}$; donc $\log \sqrt[m]{a} = \frac{\log a}{m}$

TABLES DE LOGARITHMES.

305. Les tables de logarithmes renferment les logarithmes de tous les nombres, généralement de 1 à 10000. Celles de Chambers vont jusque 10800.

Les logarithmes sont le plus souvent calculés jusque la 7e décimale. Chaque table de logarithmes donne une préface explicative au sujet de son emploi. Une lecture attentive de cette préface suffira pour mettre le lecteur au courant de la méthode à suivre pour trouver le logarithme d'un nombre donné, ou trouver le nombre correspondant à un logarithme donné.

Compléments arithmétiques.

306. On appelle **complément arithmétique** d'un logarithme ce qui manque à ce logarithme pour faire 10 unités entières ou, ce qui revient au même, le résultat que l'on obtient en retranchant de 10 le logarithme donné.

Ainsi le complément de $3{,}4725843 = 10 - 3{,}4725843 =$

$$\text{C. } 3{,}4725843 = 6{,}5274157$$

On obtient un complément en retranchant de 10 le 1er chiffre de droite et tous les autres de 9

$$\text{C. } 12{,}7258437 = \bar{3}{,}2741563$$

$$\text{C. } \bar{3}{,}7465287 = 12{,}2534713.$$

307 Usage des Compléments.

Lorsque, dans les calculs par logarithmes, on est conduit à faire une soustraction, on la transforme le plus souvent en une addition à l'aide des compléments.

Supposons que l'on ait à trouver le résultat numérique $l \quad l'+l''-l'''$; l, l', l'', l''' étant des logarithmes à ajouter et à retrancher. On peut écrire que

$$l-l'+l''-l''' = l+10-l'+l''+10-l'''-20$$

Or $10-l' =$ complément de l'

$10-l''' =$ complément de l''' Donc

$$l-l'+l''-l''' = l+\text{C. log } l'+l''+\text{C. log } l'''-20$$

C'est-à-dire que pour avoir le résultat cherché, il faut faire la somme des logarithmes affectés du signe + et des compléments des logarithmes affectés du signe —; puis retrancher de la caractéristique du résultat autant de fois 10 que l'on a pris de compléments.

308. Nous avons dit, au début des considérations générales, qu'il y avait une infinité de systèmes de logarithmes définis par les progressions.

Nous allons voir le moyen de passer d'un système de logarithm à un autre.

On peut toujours choisir, à volonté, deux progressions, l'une géométrique commençant par l'unité, l'autre arithmétique commençant par zéro. Ces progressions fournissent un système de logarithmes, qui jouira de toutes les propriétés démontrées pour les logarithmes vulgaires.

Soient x et x' les logarithmes d'un nombre N dans deux systèmes de base a et b

Par définition, le logarithme d'un nombre est la quantité à laquelle il faut élever la base pour reproduire le nombre donné ; on aura donc :

$$(1)\begin{cases} N=a^x & \text{et} \\ N=b^{x'} \end{cases}$$

D'où, prenant les logarithmes des égalités (1) dans le premier système, on aura.

$$\log_a N=x$$

$$\log_a N=x'\log_a b \quad \text{D'où}$$

$$x'=\frac{\log_a N}{\log_a b}=\frac{1}{\log_a b}\times\log_a N=\frac{1}{\log_a b}\times x$$

Or x' est le logarithme de N dans la base b ; donc :

Pour passer d'un système dont la base est **a** *à un autre système dont la base est* **b**, *on multiplie tous les logarithmes calculés dans le 1er système par l'inverse du logarithme de la 2me base, pris dans le 1er système.* Cette quantité *constante* s'appelle **module**.

309. *Le rapport des logarithmes de deux nombres est le même dans tous les systèmes.*

Soient A et B deux nombres et soit $\frac{m}{n}$ le rapport de leurs logarithmes dans un certain système. On aura donc

$$(1)\quad \frac{\log_1 A}{\log_1 B}=\frac{m}{n} \text{ d'où } m \log_1 B = n \log_1 A \text{ ou encore}$$

$$\log_1 A^n = \log_1 B^m \text{ ou } A^n = B^m \quad (2)$$

Prenons le logarithme de cette égalité (2) dans un autre système.

$$\log_2 A^n = \log_2 B^m \quad \text{C'est-à-dire}$$
$$n \log_2 A = m \log_2 B \quad \text{donc}$$

$$(3)\quad \frac{\log_2 A}{\log_2 B}=\frac{m}{n}$$

De (1) et (3) on tire : $\frac{\log_1 A}{\log_2 A}=\frac{\log_1 B}{\log_2 B}$ Ce qui veut dire que le rapport des logarithmes d'un même nombre dans deux systèmes différents est le même pour tous les nombres.

310. Si l'on désigne ce rapport constant par M on a :

$$\frac{\log_1 A}{\log_2 A}=M \quad \text{d'où}$$

$$\log_1 A = M \log_2 A \quad (a)$$

On en conclut que, lorsque l'on connaît le logarithme d'un nombre dans un système, pour avoir le logarithme de ce nombre dans un autre système, il faut multiplier le premier logarithme par un nombre constant M. Ce nombre constant s'appelle le *module* du second système par rapport au premier.

311. Nous avons vu (279) que

$$x'=\frac{1}{\log_a b}\times x \quad (b)$$ Si nous identifions (a) et (b) on voit que

$$\text{le module } M=\frac{1}{\log_a b}$$

C'est-à-dire que *le module est l'inverse du logarithme de la nouvelle base pris dans l'ancienne base.*

Exemple : Etant donné que le logarithme de 3452 est 3,5380708 dans la base 10, on demande de trouver le logarithme de ce nombre dans la base 7.

$$\log_7 3452 = M \log_{10} 3452 = \frac{1}{\log_{10} 7} \times \log_{10} 3452$$

$$\log_7 3452 = \frac{3,5380708}{0,8450980} = 4,1865807$$

Exemple de calcul logarithmique :

$$X = \sqrt[5]{\frac{7,1895 \times \overline{4764,2}^2 \times \overline{0,00326}^5}{0,000489 \times \overline{457}^3 \times \overline{0,0576}^2}}$$

$$5 \log X = \log 7,1895 + 2 \log 4764,2 + 5 \log 0,00326 - \log 0,000489 - 3 \log 457 - 2 \log 0,0576$$

$$5 \log X = \log 7,1895 + 2 \log 4764,2 + 5 \log 0,00326 + C. \log 0,000489 - 10 + C. 3 \log 457 - 10 + C. 2 \log 0,0576 - 10$$

log 7,1895	= 0,8566987	
2 log 4764,2	= 7,3559800	
5 log 0,00326	= $\bar{13}$,5660880	
C. log 0,000489—10	= 3,3106911	log 0,000489 = $\bar{4}$,6893089
C. 3 log 457 — 10	= $\bar{8}$,0202514	3 log 457 = 7,9797486
C. 2 log 0,0576 — 10	= 2,4791550	2 log 0,0576 = $\bar{3}$,5208450
	$\bar{7}$,5888642	

$$\log X = \frac{\bar{7},5888642}{5} = \bar{2},7177728$$

$$X = 0,052212$$

CHAPITRE VIII

§ 1.—DES INTÉRÊTS.

312. On appelle **intérêt** la somme payée par l'emprunteur au prêteur, pour l'usage d'une certaine somme d'argent que l'on appelle **capital**.

L'intérêt se règle d'après les conventions entre les intéressés ou d'après les conventions légales et se paie à **tant pour cent par an** (%).

Ainsi on dit qu'un capital est placé à 5%, quand on reçoit 5 dollars par 100 dollars placés pendant un an. Cet intérêt pour cent s'appelle **taux**.

A.—Intérêts simples.

313. Formules générales.

L'intérêt est dit *simple*, lorsqu'il se paie chaque année et constitue une rente.

Soit un capital A placé pendant t années au taux i. On demande l'intérêt au bout de ce temps. Soit X l'intérêt cherché.

Puisque \$100 rapportent en 1 an \$ i

1 " " 1 " $\frac{i}{100}$

A " " 1 " $\frac{Ai}{100}$

A " " t " $\frac{Ait}{100}=X$

Donc pour trouver l'intérêt au bout du temps **t**, *on divise le produit du capital, du taux et du temps par 100.*

$$X=\frac{Ait}{100} \qquad (1)$$

314. De la formule (1), on peut déduire une des quantités X, A, i, t, les trois autres étant connues.

315. Trouver le *capital*, connaissant l'intérêt pour un an, le taux et le temps du placement.

La formule (1) nous donne, en tirant la valeur de A

$$A=\frac{100X}{it} \qquad (2)$$

On divise donc 100 fois l'intérêt par le produit du taux par le temps.

316 Trouver le *taux*, connaissant le capital, l'intérêt et le temps du placement.

La formule (1) donne encore :

$$i=\frac{100X}{At} \quad (3)$$

On divise donc 100 fois l'intérêt par le produit du capital par le temps.

317. Trouver le *temps* d'un placement, connaissant le capital, l'intérêt et le taux.

La formule (1) donne :

$$t=\frac{100X}{Ai} \qquad (4)$$

On divise donc 100 fois l'intérêt par le produit du capital par le taux.

318. Applications.

I. On demande l'intérêt produit par une somme de $1500 placé à 5°/₀ pendant 4 ans ?

Formule (1) donne $X=\frac{Ait}{100}$ dans laquelle

$$A=1500,\ i=5,\ t=4. \qquad \text{donc}$$

$$X=\frac{1500\times5\times4}{100}=\$300.$$

II. On demande le capital qui, placé pendant 3 ans à 4°/₀, a donné un intérêt de $240.

Formule (2) donne $A = \frac{100X}{it}$ dans laquelle

$$X = 240,\ i = 4,\ t = 3 \qquad \text{donc}$$

$$A = \frac{100 \times 240}{4 \times 3} = \$2000.$$

III. On demande de déterminer le *taux* de l'intérêt d'un capital de $6000 qui, étant placé pendant 12 ans, a produit $2880.

Formule (3) donne $i = \frac{100X}{At}$ dans laquelle

$X = 2880,\ A = 6000,\ t = 12$

$$i = \frac{100 \times 2880}{6000 \times 12} = 4\%$$

IV. On demande de déterminer le *temps* pendant lequel un capital de $5680. placé à 5% a produit un intérêt de $2840.

Formule (4) donc $t = \frac{100X}{Ai}$ dans laquelle

$$X = 2840,\ A = 5680,\ i = 5$$

$$t = \frac{100 \times 2840}{5680 \times 5} = 10 \text{ ans.}$$

319. Si l'on veut résoudre toutes les questions précédentes et rechercher la valeur des divers éléments au bout de 1 an, il suffit de faire dans les formules $t = 1$

320. Si le temps donné est un nombre de mois, il suffit de remplacer, dans les formules, t en fraction d'année. Ainsi, par exemple, t mois $= \frac{t}{12}$ d'année.

Alors les formules deviennent :

$$X = \frac{Ait}{1200} \qquad A = \frac{1200X}{it} \qquad i = \frac{1200X}{At} \qquad t = \frac{1200X}{Ai}$$

321. Si le temps donné est un nombre de jours, il suffit de remplacer, dans les formules, t en fraction d'année. Ainsi, par exemple, t jours $= \frac{t}{360}$ d'année. On admettra 360 jours pour l'année commerciale.

Les formules deviennent alors :

$$X=\frac{Ait}{36000} \quad A=\frac{36000X}{it} \quad i=\frac{36000X}{At} \quad t=\frac{36000X}{Ai}$$

Si le temps est donné en année, mois et jours, on le transforme complètement en jours.

321bis. Problème.—Trois associés ont mis dans une entreprise : le premier 8000 frs pendant 10 mois, le second 12000 frs pendant 6 mois et le troisième 5000 frs pendant 13 mois. Le bénéfice a été de 17360 frs. Quelle est la part qui revient à chacun (Le taux de l'intérêt étant fixé à 6 o/o)

Intérêts de	8000 frs	pendant	10 mois	=	400
" "	12000 "	"	6 "	=	360
" "	5000 "	"	13 "	=	325
" "	25000				=1085

Il reste donc à partager proportionnellement aux mises la somme de 17360—1085=16275. Ce partage donne :

Pour le 1er associé $\frac{16275\times8000}{25000}=5208$

2e $\frac{16275\times12000}{25000}=7812$

3e $\frac{16275\times5000}{25000}=3255$

Pour avoir la part totale de bénéfice, on ajoutera aux parts précédentes la part de bénéfice provenant de l'intérêt de la somme placée.

Ainsi le 1er	associé	aura	5208+400=	5608
2e	"	"	7812+360=	8172
3e	"	"	3255+325=	3580
			Total des bénéfices =	17360

B.—Intérêts Composés.

322. On dit qu'un capital est placé à *intérêt composé*, lorsque le prêteur, au lieu de retirer chaque année l'intérêt du capital, le laisse entre les mains de l'emprunteur, pour le

faire valoir conjointement avec la somme primitive pendant l'année suivante.

Soit A le capital placé et X ce capital accru des intérêts
n la durée du placement
i le taux °/₀ et r l'intérêt de $1 pendant 1 an ; alors

$$r = \frac{i}{100}$$

Si $1 rapporte r par an, A rapporte Ar
donc au bout de la 1ère année, le capital est devenu :

$$A + Ar = A(1+r) = A'$$

De même, au bout de la 2e année, le capital A' placé dans les mêmes conditions que A, produit A'r et devient au bout de cette année :

$$A' + A'r = A'(1+r) = A(1+r)(1+r) = A(1+r)^2 = A''$$

Ce nouveau capital A'', placé dans les mêmes conditions pendant la 3e année, produit A''r et devient donc :

$$A'' + A''r = A''(1+r) = A(1+r)^3$$

et ainsi de suite, de sorte qu'au bout de n années, le capital accru de ses intérêts, sera devenu, par analogie :

$$X = A(1+r)^n \quad (1)$$

322bis. Si au lieu de supposer l'intérêt dû seulement 1 fois par année, on le suppose dû k fois par année au taux de $\frac{r}{k}$ par intervalle, le capital A, accru des intérêts se composant de $\frac{1}{k}$ d'année en $\frac{1}{k}$ d'année devient, au bout de n années :

$$X = A\left(1+\frac{r}{k}\right)^{nk} \quad (1')$$

323 Cas où le temps comprend une fraction d'année.

Supposons que la durée du prêt soit de n années et k jours.

On calcule d'abord ce que devient le capital pendant les n années. La formule (1) nous donne

$$X' = A(1+r)^n$$

puis on considère ce nouveau capital comme placé à intérêt simple pendant les k jours.

Or \$1 rapporte en 365 jours r

1 " " 1 " $\frac{r}{365}$

1 " " k " $\frac{rk}{365}$

Donc au bout de ce temps \$1 devient $\left(1+\frac{kr}{365}\right)$

et $A(1+r)^n$ devient au bout du même temps

$$X = A(1+r)^n\left(1+\frac{kr}{365}\right) \quad (2)$$

324. Les formules (1) et (2) nous permettent de calculer une des quatre quantités A, X, i ou n, les trois autres étant connues.

De (1) on tire successivement :

$$X=A(1+r)^n \; (3) \; ; \; A=\frac{X}{(1+r)^n} \; (4) \; ; \; (1+r)=\sqrt[n]{\frac{X}{A}} \; (5) \; ; \; n=\frac{\log X-\log A}{\log(1+r)}$$

325. Problème I.—Quelle est la valeur après n années d'un capital A placé à intérêt composé et au taux r ?

La formule (1) donne $X=A(1+r)^n$

Application : $n=7$ ans ; $A=12540$ $i=5\%$

$$X=12540\,(1+0.05)^7=12540\,(1.05)^7$$

$$\log X=\log 12540+7\log 1.05$$

$$\log 12540=4.0982975$$

$$7\log 1.05=0.1483251$$

$$\log X=4.2466226$$

$$X=\$17645,04$$

Problème II.—Quelle somme faut-il placer à un taux donné r pour obtenir une somme X après n années ?

La formule (3) donne $A=\frac{X}{(1+r)^n}$.

Application : $X=24600$; $n=12$; $i=4.75\%$

$$A=\frac{24600}{(1,0475)^{12}}$$

$$\log A = \log 24600 - 12 \log 1.0475$$

$$\log 24600 = 4,39[illegible]035^1$$

$$12 \log 1,0475 = 0,2[illegible]18480$$

$$\log A = 4,1490871 \qquad A = \$14095,70$$

Problème III.—Un capital a été placé aujourd'hui, il produira une somme X dans n années. Quel est le taux de l'intérêt ?

La formule (4) donne $(1+r) = \sqrt[n]{\frac{X}{A}}$

Application : A=28895 ; X=250000 ; n=73

$$(1+r) = \sqrt[73]{\frac{250000}{28895}}$$

$$\log (1+r) = \frac{\log 250000 - \log 28895}{73}$$

$$\log 250000 = 5,3979400$$

$$\log 28895 = 4,4608227$$

$$0,9371173$$

$$\log (1+r) = \frac{0,9371173}{73} = 0,0128372$$

$$(1+r) = 1,03 \qquad r = 0,03 \qquad i = 3\%$$

Formules de placement ou de dotation.

Problème IV.—Une personne place chaque année une somme a à intérêt composé, pendant n années. Le taux étant r, quelle somme cette personne retirera-t-elle au bout du temps déterminé ?

1° La somme est placée *au commencement* de l'année.

La somme a, placée au commencement de la 1ère année, devient $a(1+r)^n$ au bout de n années ;

La même somme, placée au commencement de la 2e année, devient $a(1+r)^{n-1}$ au bout du temps du placement, et ainsi de suite

La somme a, placée au commencement de l'avant-dernière et de la dernière année, correspond respectivement à $a(1+r)^2$ et $a(1+r)$.

Le montant total est donc

$$S=a(1+r)^n+a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}+\ldots\ldots+a(1+r)$$

$$S=a(1+r)[1+(1+r)+(1+r)^2+\ldots\ldots(1-r)^{n-2}+(1+r)^{n-1}]$$

$$S=a(1+r)\frac{(1+r)^{n-1}\times(1+r)-1}{1+r-1}=\frac{a(1+r)[(1+r)^n-1]}{r} \quad (6)$$

2° La somme a est placée *à la fin* de chaque année.

La suite sera :

$$S=a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}+\ldots\ldots a(1+r)+a$$

$$S=a[1+(1+r)+(1+r)^2\ldots\ldots+(1+r)^{n-2}+(1+r)^{n-1}]$$

$$S'=\frac{a[(1+r)^{n-1}(1+r)-1}{1+r-1}=\frac{a[(1+r)^n-1]}{r} \quad (7)$$

Remarque I.—Les formules (6) et (7) se déduisent l'une de l'autre, car il est facile de voir que

$$S=S'(1+r) \qquad \text{donc}$$

$$S'=\frac{S}{1+r}$$

Remarque II.—Les élèves confondent souvent cette question de placement ou de dotation avec la question des annuités.

On doit, à la rigueur, appeler annuité tout versement fait annuellement quelqu'en soit le but ; mais, on réserve plus spécialement ce nom à l'usage qu'en indique le paragraphe suivant.

§ 2.—Des annuités.

326. On entend, d'une façon générale, par *annuité* le paiement annuel au moyen duquel l'emprunteur éteint sa dette, capital et intérêts, au bout d'un certain nombre d'années.

L'annuité entendue dans ce sens, c'est-à-dire comme remboursement s'effectue toujours *à la fin* de l'année.

Si l'on paie annuellement une rente qui surpasse l'intérêt, on diminue peu à peu sa dette et l'on parvient à s'en libérer complètement au bout d'un temps plus ou moins long. C'est cette sorte de rentes qu'on appelle *rentes à termes* ou *annuités*. La portion de l'annuité (somme payée annuellement) qui représente un acompte sur le capital emprunté s'appelle *amortissement*.

Exemple : Une somme de $34600 empruntée pour 51 ans est remboursable par annuités de $1600,56, l'intérêt étant de 4°/o.

La partie des $1600,56, qui représente un acompte sur la somme de $34600 empruntée, est l'*amortissement*. L'autre partie correspond à la portion annuelle de l'intérêt.

Ces deux parts ne sauraient être fixes ; elles varient d'une année à l'autre pendant le remboursement, mais leur somme est fixe : $1600,56 dans le cas de l'exemple.

Les annuités sont *variables* ou *fixes*.

Les *annuités variables* consistent en paiements annuels différents. Les seules variations d'annuités qui offrent un intérêt pratique sont celles qui ont une base fixe ; les annuités irrégulièrement variables ne constituent pas un mode spécial de remboursement. Un exemple très simple d'annuités régulièrement variables est celui où l'annuité se compose d'un amortissement fixe et d'un intérêt décroissant.

Les *annuités fixes* sont des paiements annuels toujours égaux, au moyen desquels on amortit, au bout d'une certaine période de temps, un emprunt fait à un taux déterminé.

En langage financier, on appelle amortissement l'ensemble des institutions et des opérations qui ont pour but d'éteindre une dette publique.

Dans un sens restreint, il s'applique au système de remboursement qui repose sur l'emploi de l'intérêt composé.

327. Formule générale.

Une personne emprunte aujourd'hui une somme A pour n années au taux de r pour 1 piastre (i°/o) ; pour s'acquitter, elle paie, à la fin de chaque année, une somme déterminée X

calculée de manière qu'après n paiements égaux à X, elle ait remboursé capital et intérêts compris.

Si l'emprunteur attendait la fin de la n^e année pour opérer le remboursement, il devrait à cette époque, en vertu de la formule des intérêts composés :

$$A(1+r)^n$$

Mais il paie, à la fin de la 1ère année, une première somme X ; il avance donc ainsi le remboursement partiel de $(n-1)$ années. Or, pendant $(n-1)$ années, cette somme X aurait produit $X(1+r)^{n-1}$. Il libère donc sa dette de $X(1+r)^{n-1}$ et il ne doit donc plus que :

$$A(1+r)^n - X(1+r)^{n-1}$$

De même, la somme X payée à la fin de la 2e année, libère l'emprunteur d'une somme équivalant, au bout de $(n-2)$ années, à $X(1+r)^{n-2}$; il ne doit donc plus, au bout de la 2e année, que

$$A(1+r)^n - X(1+r)^{n-1} - X(1+r)^{n-2}$$

et ainsi de suite ; de sorte qu'à la fin de l'avant-dernière année, il rembousera une somme X qui vaudra à la fin de la dernière année $X(1+r)$. Enfin, à la fin de la dernière année, il rembourse X et sa dette est épuisée.

Donc on peut écrire que :

$$A(1+r)^n - X(1+r)^{n-1} - X(1+r)^{n-2} - \ldots - X(1+r) - X = 0$$

$$A(1+r)^n = X(1+r)^{n-1} + X(1+r)^{n-2} + \ldots + X(1+r) + X$$

$$A(1+r)^n = X[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \ldots + (1+r) + 1]$$

La quantité entre crochets est la somme des termes d'une progression géométrique dont le premier terme est 1, le dernier $(1+r)^{n-1}$, et la raison $(1+r)$. (N° 291)

$$S = \frac{lq-a}{q-1} = \frac{(1+r)^{n-1} \times (1+r) - 1}{(1+r)-1} = \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

D'où :

$$A(1+r)^n = X\frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad \text{d'où enfin :}$$

$$X = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \quad (1)$$

Cette formule permet de trouver une des quatre quantités A, r, X ou n lorsqu'on connait les trois autres.

On remarquera toutefois que la résolution de la formule (1), par rapport à r, donne une expression de $(n+1)^e$ degré que l'on ne peut résoudre que par des procédés particuliers.

On arrivera à une valeur suffisamment approchée de r par une suite de tâtonnements convenablement dirigés.

328. Problème I.—Quelle annuité X faut-il payer à la fin de chaque année pour amortir en n années un emprunt donné A et ses intérêts composés, le taux étant de r pour \$1 ?

La formule (1) donne $X = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$

$$\log X = \log A + \log r + n \log (1+r) - \log [(1+r)^n - 1]$$

Application : A=34680 ; n=51 ans ; i=4°/₀

Calcul de $(1+r)^n - 1$

$$\log (1+r)^n = n \log (1+r) = 51 \log (1{,}04) = 0{,}8686983$$

$$(1+r)^{51} = 7{,}3909 \; ; \; (1+r)^{51} - 1 = 6{,}3909$$

$$X = \frac{34600 \times 0{,}04 \times 7{,}3909}{6{,}3909} = \$1600{,}56$$

Problème II.—On emprunte aujourd'hui une somme A au taux r et l'on veut la rembourser au moyen d'annuités égales à X. Pendant combien de temps devra-t-on payer ?

La formule (1) donne :

$$(1+r)^n = \frac{X}{X - Ar} \quad \text{d'où} \quad n = \frac{\log X - \log (X - Ar)}{\log (1+r)}$$

Ce problème n'est possible que si $(X - Ar)$ est positif, car les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes réels.

Si $X = Ar$, la formule devient $n = \frac{\log X - \log 0}{\log (1+r)}$

et comme $\log 0 = -\infty$ on en déduit :

$$n = \frac{\log X - (-\infty)}{\log (1+r)} = \frac{\log X + \infty}{\log (1+r)} = \infty$$

Donc si $X = Ar$, c'est-à-dire si l'emprunteur ne paie, à la fin de chaque année, que l'intérêt simple du capital, il doit toujours le capital et sa dette ne s'éteindra jamais. Ce cas est celui des **rentes perpétuelles.**

Application : A=260000 ; X=10000 ; i=3,25°/₀

$$n=\frac{\log X-\log (X-Ar)}{\log (1+r)}=\frac{\log 10000-\log 1550}{\log 1,0325}$$

$$\log 10000=4,0000000$$
$$\log 1550=3,1903317$$
$$0,8096683$$
$$\log 1,0325=0,0138901$$
$$n=\frac{0,8096683}{0,0138901}=58,29$$

On devra donc effectuer 58 annuités de $10000 plus les $\frac{29}{100}$ d'une annuité soit $2900.

Problème III.—Quelle somme A peut-on emprunter aujourd'hui en offrant de la rembourser en n années, par annuités égales à X, le taux étant de r ?

La formule (1) donne $A=\frac{X\left[(1+r)_n-1\right]}{r(1+r)^n}$

Application : X=825 ; n=37 ; taux 4°/₀

Calcul de $(1+r)^n$

$$n \log (1+r)=37 \log (1,04)=0,6302321$$
$$(1+r)^n=4,2681$$
$$(1+r)^n-1=3,2681$$

Dès lors $A=\frac{825\times 3,2681}{0,04\times 4,2681}=\$15792,80$

§ 3.—Moment ou époque moyenne.

329 Plusieurs sommes sont payables à des époques différentes, et on veut les fondre en une seule payable à une époque déterminée.

Quel sera le montant de cette somme ?

Il faut tout d'abord ramener toutes les sommes à une même époque, laquelle peut d'ailleurs être choisie arbitrairement.

Soit une somme de $5000 payable au bout de 5 ans
et " " " 4000 " " " " 3 "

on demande quelle somme X il faudra verser au bout de 7 ans pour payer, à cette époque, les deux sommes ensemble, le taux étant de 4°/₀

Le capital $5000 vaut actuellement [voir formule (3) des intérêts composés].

$$\frac{5000}{(1.04)^5}$$

De même $4000 valent actuellement

$$\frac{4000}{(1.04)^4}$$

La somme X vaut actuellement

$$\frac{X}{(1.04)^7}$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{X}{(1.04)^7} = \frac{5000}{(1.04)^5} + \frac{4000}{(1.04)^4}$$

$$X = 5000\,(1.04)^2 + 4000\,(1.04)^3$$

$$X = 5000 \times 1.08 + 4000 \times 1.12 = \$9922{,}66$$

§ 4.—Escompte.

330. L'escompte est la diminution faite sur un paiement en monnaie, lorsque celui-ci s'effectue avant qu'il soit dû. Cette remise dépend de la somme due, du temps dont on avance le paiement et du taux de l'intérêt qui prend ici le nom de *taux d'escompte*.

La valeur à l'échéance s'appelle **valeur nominale** et la valeur, au moment où l'on fait escompter, s'appelle **valeur actuelle, réelle** ou **comptant**.

La valeur actuelle d'une dette payable sans intérêt à une époque déterminée est donc la somme qui, étant placée à l'intérêt légal produirait le montant de la dette au moment de l'échéance. En d'autres termes, la somme payable à l'échéance fixée doit représenter la somme à payer immédiatement plus les intérêts de cette *dernière* depuis l'époque actuelle jusqu'à l'échéance indiquée.

L'escompte ainsi calculée s'appelle l'**escompte en dedans**. *L'escompte en dedans d'un billet est donc l'intérêt de sa valeur actuelle.*

Cette manière de calculer l'escompte, quoique étant la seule juste, n'est cependant pas adoptée par le commerce. *La retenue opérée est l'intérêt de la valeur nominale*, c'est-à-dire de la valeur à l'échéance, calculé pendant le temps qui reste à s'écouler jusqu'à l'échéance : cet escompte est ce que l'on appelle l'**escompte commercial** ou **en dehors**.

Dans ce cas, la valeur actuelle sera la valeur nominale, diminuée de l'intérêt de cette valeur nominale depuis l'époque actuelle jusqu'à l'échéance indiquée. L'escompte en dehors comprend donc l'escompte en dedans plus l'intérêt de ce dernier et, c'est ce dernier intérêt qu'il n'est pas juste de retenir.

En résumé :

L'escompte en dedans est la différence entre la valeur nominale et la valeur actuelle d'un billet ;

L'escompte en dehors est l'intérêt compté sur la valeur nominale du billet pendant le temps qui reste à s'écouler entre le moment du paiement et celui de l'échéance.

De ce qui précède, on peut établir le tableau suivant :

Escompte en dedans.	*Escompte en dehors.*
A Valeur nominale	A Valeur nominale
A' Valeur actuelle	A' Valeur actuelle
E' Escompte	E Escompte
$A = A' + \frac{A'it}{100}$	$E = \frac{Ait}{100}$
$A' = \frac{100\,A}{100 + it}$	$A' = A - E$
$E = A - A' = \frac{Ait}{100 + it}$	

331. Escompte en dehors.—*Formule générale.*

Soit A une somme payable dans t jours. Quel est l'escompte en dehors, si l'on veut être payé immédiatement, le taux étant de i°/₀ ?

Soit E l'escompte.

Nous avons vu que l'escompte en dehors était l'intérêt de la valeur nominale du billet, donc :

$$E=\frac{Ait}{36000} \quad (1)$$

La somme à payer est donc $A'=A-E=A-\frac{Ait}{36000}$

$$A'=A\left(1-\frac{it}{36000}\right) \quad (2)$$

Ces formules (1) et (2) permettent de résoudre toutes les questions relatives à l'escompte en dehors.

332. *Problème.*—Une somme de $720 est payable dans 3 mois. Quelle est la somme à payer immédiatement, le taux de l'escompte étant de 6°/₀ en dehors ?

La formule (2) donne pour $A=720$; $i=6$; $t=90$

$$A'=720\left(1-\frac{6\times 90}{36000}\right)=709,20$$

L'escompte est donné par $720-709,20=10.80$

ou par la formule (1) $E=\frac{Ait}{36000}=\frac{720\times 6\times 90}{36000}=10,80$

333. Escompte en dedans.—*Formule générale.*

Quelle somme doit-on payer immédiatement pour escompter en dedans un billet de $A payable dans t jours, le taux de l'escompte en dedans étant de i% ?

Soit A' la somme à payer immédiatement ; l'intérêt de cette somme pendant les t jours qui doivent s'écouler jusque l'échéance à i% sera $\frac{A'it}{36000}$. Donc la somme à payer dans t jours sera $A=A'+\frac{A'it}{36000}=A'\left(1+\frac{it}{36000}\right)$ d'où :

la *valeur actuelle* est :

$$A'=\frac{A}{1+\frac{it}{36000}} \quad (3)$$

La valeur de *l'escompte en dedans* est donc :

$$E'=A-\frac{A}{1+\frac{it}{36000}}=A\left(1-\frac{1}{1+\frac{it}{36000}}\right)=\frac{Ait}{36000+it} \quad (4)$$

Les formules (3) et (4) permettent de résoudre toutes les questions relatives à l'escompte en dedans.

334. *Problème.*—Même que celui pour l'escompte en dehors.

Appliquons la formule (3) en y faisant A=720 ; i=6, t=90 il vient :

$$A'=\frac{720}{1+\frac{6\times 90}{36000}}=709{,}36$$

L'escompte est donc donné par 720—709,36=10,64 ou par la formule (4).

$$E'=\frac{Ait}{36000+it}=\frac{720\times 6\times 90}{36000+6\times 90}=10{,}64$$

335. Nous avons dit que la différence entre l'escompte en dehors et l'escompte en dedans était précisément l'intérêt de ce dernier pendant le temps entre l'époque actuelle et le terme de l'échéance.

En effet, les formules (1) et (4) donnent :

$$\frac{Ait}{36000}-\frac{Ait}{36000+it}=Ait\left(\frac{1}{36000}-\frac{1}{36000+it}\right)=$$

$$\frac{Ait}{36000}\times\frac{it}{36000+it}=\frac{Ait}{36000+it}\times\frac{it}{36000}=\frac{E'it}{36000}$$

Or cette valeur est précisément l'intérêt à i% pendant le temps t de la somme $\frac{Ait}{36000+it}=E'$ (c'est-à-dire l'escompte en dedans.

336. *Application.*—Les deux problèmes précédents ont donné :

Escompte en dehors E=10,80
" " dedans E'=10,64

E—E'= 0,16

Or $\frac{E'it}{36000}=\frac{10{,}64\times 6\times 90}{36000}=0{,}16$ intérêt pendant 90 jours de l'escompte en dedans à 6%.

CHAPITRE IX.

COMPLÉMENTS D'ARITHMÉTIQUE.

A.—Opérations sur les nombres entiers.

337. I.—*Un produit de deux facteurs renferme autant de chiffres qu'il y en a dans les deux facteurs réunis ou un de moins.*

Soient A et B deux facteurs ayant respectivement m et n chiffres. Je dis que le produit $A \times B$ contiendra $(m+n)$ ou $(m+n-1)$ chiffres.

En effet, A ayant m chiffres est plus petit que le plus petit nombre de $(m+1)$ chiffres, et plus grand ou égal au plus petit nombre de m chiffres.

C'est-à-dire $\quad 10^{m-1} \leqq A < 10^m$

De même $\quad 10^{n-1} \leqq B < 10^n \quad$ Et, faisant le produit

$$10^{m+n-2} \leqq A \times B < 10^{m+n}$$

Ce qui veut dire que le produit $A \times B$ est plus petit que le plus petit nombre de $(m+n+1)$ chiffres (10^{m+n}) : il a donc au plus $(m+n)$ chiffres. D'un autre côté, il est plus grand ou égal a 10^{m+n-2}, c'est-à-dire le plus petit nombre de $(m+n-1)$ chiffres : donc il peut avoir $(m+n-1)$ chiffres.

338. II.—*Si on effectue les divisions successives de N par* **a**, *du quotient entier par* **b**, *du nouveau quotient entier par* **c**, *le dernier quotient entier est la partie entière du quotient de* N *par* **abc**.

Appelons $q_1\ q_2\ q_3$ les quotients successifs et
$r_1\ r_2\ r_3$ les restes correspondants.

Nous aurons donc successivement :

$$\left.\begin{array}{l} N=aq_1+r_1 \\ q_1=bq_2+r_2 \\ q_2=cq_3+r_3 \end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} N=a[bq_2+r_2]+r_1= \\ \quad a[b(cq_3+r_3)+r_2]+r_1 \\ N=abcq_3+(abr_3+ar_2+r_1) \end{array}\right. \quad (1)$$

Or r_1, r_2, r_3 étant les restes, on peut écrire que :

$$r_1 \leqq a-1,\ r_2 \leqq b-1,\ r_3 \leqq c-1$$

D'où (1) devient :

$$N=abcq_3+<[ab(c-1)+a(b-1)+a-1] \qquad (*)$$

$$N=abcq_3+<(abc-ab+ab-a+a-1)$$

$$N=abcq_3+<(abc-1)$$

Donc $\dfrac{N}{abc}=q_3+<\left(1-\dfrac{1}{abc}\right)$ et, à fortiori

$$\frac{N}{abc}=q_3+<1$$

On voit donc bien que q_3 est la partie entière de la division de N par abc, puisque la 2e partie est plus petite que l'unité.

B.—Théorie des systèmes de numération.

339. Nous avons jusqu'à présent été habitués à faire tous les calculs dans le système à base décimale. Nous allons voir que ce système n'est pas unique, et que l'on peut faire toutes les opérations dans un système à base quelconque.

340. On désigne sous le nom de **Base** d'un système de numération, *le nombre de chiffres ou figures qu'on emploie pour écrire tous les nombres.*

En généralisant le principe fondamental de la numération écrite du système décimal, on peut dire : *dans un système de base* B *quelconque, tout chiffre placé à la gauche d'un autre doit exprimer des unités* B *fois plus grandes que celles de cet autre.*

341. Dans un système de numération quelconque tous les nombres peuvent se représenter graphiquement.

(*) Note.—Les indications (+ <) signifient "*plus une quantité plus petite que.....*"

Soit le système septenaire (qui a 7 chiffres).

Il a les 6 premiers chiffres significatifs et le chiffre complémentaire *0*. Si à 6 (qui est 9 dans le système décimal), on ajoute 1 unité, on aura 7 (10 dans le système décimal) ou 1 unité de 2e ordre qui s'écrit *10* ; augmentant de 1, 2, 3, 4, 5, 6 ce dernier nombre, on aura 11, 12, 13, 14, 15, 16 qui vaudront dans le système 7 : (huit), (neuf), (dix), (onze), (douze), (treize). Une nouvelle unité ajoutée à 16(19 dans le système décimal) forme 2 unités du 2e ordre ou (vingt) et ainsi de suite ; on formera

21	22	23	24	25	26	30
(quinze)	(seize)	(dix-sept)	(dix-huit)	(dix-neuf)	(vingt)	(vingt-un) (3×7)
31	32	33	34	35	36	40 (4×7)
41	42	43	44	45	46	50 (5×7)
51	52	53	54	55	56	60 (6×7)
61	62	63	64	65	66	100 (7×7)

On obtient, en opérant sur 100 comme sur 10 :

101 102.....666

En ajoutant *une unité* à 666, on obtient l'unité du 4e ordre ou 1000 (7^3) et ainsi de suite.

Ainsi, dans le système septenaire, tous les nombres pourront être représentés au moyen des caractères

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

342. Remarque I.—Les nombres et chiffres entre parenthèses sont, dans le système décimal, les équivalents de ceux dans le système septenaire à côté desquels ils sont écrits.

Remarque II —Si les nombres écrits dans le système 10 peuvent se traduire simplement en langage ordinaire, cela tient à une connexion intime, existant entre la langue et ce système ; comme une semblable relation n'existe pas pour un système quelconque de numération, il s'ensuit que pour une base différente de 10, on est forcé d'énoncer chaque chiffre avec l'ordre des unités qu'il représente.

343. Trois problèmes peuvent se présenter :

1° *Traduire un nombre décimal dans un système quelconque* (Base B).

Puisqu'il faut B unités du 1er ordre pour former une unité du 2e ordre, le quotient du nombre par B exprime le nombre d'unités du 2d ordre ; le reste, écrit dans le système B, sera la figure du 1er ordre.

En opérant sur ce quotient comme sur le nombre proposé, on obtiendra le nombre d'unités du 3e ordre et le chiffre du 2d ordre de l'expression demandée ; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on obtienne un quotient moindre que B et qui, écrit dans la base B, donnera le nombre d'unités de l'ordre le plus élevé (ordre marqué par le nombre plus un, des divisions effectuées).

Si la base est supérieure à 10, on emploie les lettres *a, b, c, d....* pour représenter les chiffres significatifs exprimant plus de neuf unités.

344. *Exemple.*—Ecrire 784365 dans le système *onze.*

On représentera dix unités par *a* ; les figures sont donc :

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *a*

Tableau des opérations.

784365	11				
14	71305	11			
33	53	6482	11		
065	90	98	589	11	
10	25	102	39	53	11
a	3	3	6	9	4

Le nombre 784365 du système 10 s'écrit :

49633*a* dans le système onze.

345. II.- *Ecrire dans le système décimal un nombre du système B.*

Deux méthodes :

1° *Par voie de multiplication.*—Cette méthode se résoud de la manière suivante : on multiplie (dans le système décimal) la figure de gauche par B et on y ajoute le chiffre suivant. Multiplier de nouveau ce résultat par B et ajouter

au produit la figure suivante, et ainsi de suite jusqu'aux unités simples du nombre proposé.

Exemple.—Traduire dans le système décimal le nombre 78456 du système *neuf*.

$7\times9=63$; $63+8=71$; $71\times9=639$; $639+4=643$; $643\times9=5787$ $5787+5=5792$; $5792\times9+6=52134$ dans le système 10.

2° *Par voie de division.*—Cette méthode est identique à celle résolvant le problème 344, avec cette différence que les divisions successives par la base 10 doivent être effectuées dans le système B et que les restes sont écrits dans le système 10.

Soit à transformer par voie de division 78456 de la base *neuf* dans la base *dix*.

78456	10			
14	7132	10		
35	43	638	10	
26	92	78	57	10
4	3	1	2	5

Le nombre dans le système 10 est donc 52134.

La division devant se faire dans la base 9, on dira : $7\times9=63$; $63+8=71$; $71\div10=7$ et il reste 1 ; abaissant le 4, il reste 14 qui devient $1\times9+4=13$; $13\div10=1$ et il reste 3 ; $35=3\times9+5=32$; $32\div10=3$ et reste 2 ; $26=2\times9+6=24$; $24\div10=2$ " " 4 et ainsi de suite pour les autres dividendes.

346. III Problème.—*Ecrire dans le système B' un nombre du système B.*

Il y a deux méthodes :

1° *Transformer le nombre donné dans la base 10, puis traduire le résultat dans la base B'.*

Exemple.—Traduire dans le système à base 8 le nombre 63*ab*8 du système *douze*.

Transformons-le d'abord dans le système décimal (N° 345).

Par voie de multiplication.

63ab8

$6\times12+3=75$; $75\times12+a=910$,

$910\times12+b=10931$

$10931\times12+8=131180$

Par voie de division.

63ab8	a (dix)					
5a	7712	a				
0b	11	913	a			
18	32	93	ab	a		
8	8	1	b	11	a	
			1	8	1	

Le nombre dans la base 10 est :

131180 à transformer dans la base 8 (problème N° 343).

131180	8				
51	16397	8			
31	039	2049	8		
78	77	44	256	8	
60	5	49	16	32	8
4		1	0	0	4

Donc le nombre 63*ab*8 de la base *onze* vaut 400154 dans la base 8.

2e *méthode.—Procéder directement par voie de division en effectuant les divisions par B' dans le système B et écrire les restes dans la base B'.*

Exemple : Traduire directement dans la base *onze* le nombre 1270170 écrit dans la base 8.

(onze=13 dans la base 8)

1270170	13 (onze)				
120	77226	13			
31	102	5602	13		
37	02	20	473	13	
110	26	52	03	30	13
6	0	9		2	2

Le nombre 1270170 de la base 8 vaut 223906 dans la base *onze.*

Suite du calcul : $1\times8+2=10$ pas divisible par 11

$10\times8+7=87$; $87\div11=7$ il reste 10 qui dans le système 8 s'écrit 12 (car $1\times8+2=10$)

Abaissant le chiffre suivant, on a : $120=10\times8+0=80$; $80\div11=7$ il reste 3

$31=3\times8+1=25$ $\quad 25\div11=2$ et reste 3

$37=3\times8+7=31$ $\quad 31\div11=2$ " " 9 qui s'écrit 11 dans la base 8

$110=9\times8+0=72$ $\quad 72\div11=6$ " " 6

et ainsi de suite.

347. Les opérations fondamentales dans un système quelconque, s'effectuent de la même manière que dans la base 10 ; seulement les reports ne peuvent s'obtenir que par des divisions partielles.

348. *Exemple de la multiplication.*

Soit à multiplier dans la base *onze* le nombre 798*a*3 par 2*a*94

$$\begin{array}{r} 798a3 \\ 2a94 \\ \hline 296281 \\ 650345 \\ 72a138 \\ 148696 \\ \hline 217598421 \end{array}$$

Le multiplicande est multiplié successivement par chacun des chiffres de l'autre facteur et la somme (effectuée dans la base onze) de ces produits partiels, disposés comme dans le système décimal, a donné le produit total.

Calcul : $4\times3=12$ $\quad 12\div a=1$ reste 1

$4\times a=40$ $\quad 40+1=41$ $\quad 41\div a=3$ reste 8

$4\times8=32$ $\quad 32+3=35$ $\quad 35\div a=3$ " 2

$4\times9=36$ $\quad 36+3=39$ $\quad 39\div a=3$ " 6

$4\times7=28$ $\quad 28+3=31$ $\quad 31\div a=2$ " 9

Pour effectuer la somme des produits partiels :

$1=1$ $\quad 8+5=13\div a=1$ reste 2

$4+2+8+1=15$ $\quad 15\div a=1$ " 4

$6+3+3+6+1=19$ $\quad 19\div a=1$ " 8

et ainsi de suite.

349. *Exemple de la division.*

Soit à diviser dans la base *neuf* le nombre 643218 par 7432

```
64321837 | 7432
57345    | 7715
---------
 58658
 57345
---------
 13183
  7432
---------
 46017
 41371
---------
  4536
```

La détermination du 1er dividende partiel se fait comme dans les nombres décimaux. Ici, c'est 64321 dont la figure de droite indique l'unité du 4e ordre pour le plus élevé du quotient.

Ensuite, pour obtenir le quotient entier de ce dividende partiel par 7432, on réduit 64 (système 9) en unités décimales, et, en divisant le résultat *cinquante-huit* (6×9+4=58) par 7, on obtient le chiffre cherché ou un chiffre trop fort, à cause des reports des produits inférieurs du diviseur par cette figure. Cette division partielle donnerait 8, mais on s'assure facilement que cette figure est trop élevée et que 7 est le chiffre des unités du 4e ordre du quotient cherché, puisqu'il donne un reste 5865 moindre que le diviseur. Abaissant à la droite de ce reste le chiffre 8, on continue l'opération comme précédemment.

7432×7=57345 — En effet : (N° 348)

7×2=14÷9=1 reste 5
7×3+1=22÷9=2 " 4
7×4+2=30÷9=3 " 3
7×7+3=52÷9=5 " 7

Soustraction de 64321 – 57345 dans base 9.

5 de 1 cela ne se peut, j'emprunte 1 unité de l'ordre supérieur qui vaut 9 unités simples ; 9+1=10 10—5=5

4 de 1 cela ne se peut, j'emprunte 1 unité de l'ordre supérieur qui vaut 9 unités de l'ordre considéré 1+9=10 ; 10—4=6 et ainsi de suite, en tenant toujours compte que 1 unité d'un ordre vaut 9 unités de l'ordre immédiatement inférieur.

```
64321
57345
-----
 5865
```

350. Problème.—Comment pèsera-t-on 6863 kilog. si on ne dispose que de poids de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6^2, 6^3.... kilog.

En convertissant le nombre 6863 du système 10 dans le système *six* on trouve 51435

Donc sur l'un des plateaux de la balance devront se trouver :

1 poids de 5 kil., 3 poids de 6, 4 poids de 6^2, 1 poids de 6^3 et 5 poids de 6^4

1	poids de	$5 =$	5	kilog.
3	" "	$6 =$	18	"
4	" "	$6^2 =$	144	"
1	" "	$6^3 =$	216	"
5	" "	$6^4 =$	6480	"
			6863	"

351. Déterminer la base B du système de numération sachant que 523 vaut *deux-cent-soixante-deux.*

B étant la base, 523 peut s'écrire :

$3+2B+5B^2=262$ ou

$5B^2+2B-259=0$ Equation du 2e degré qui donne :

$$B=\frac{-2\pm\sqrt{4+20\times259}}{10}=\frac{-2\pm\sqrt{5184}}{10}=\frac{-2\pm72}{10}$$

D'où $B'=\frac{70}{10}=7$

$$B''=-\frac{74}{10}=-\frac{37}{5}$$

$B'=7$ indique que le système cherché est le système *septenaire.*

La valeur de $B''=-\frac{37}{5}$ doit évidemment être rejetée.

C.—I. Nombres premiers.

352. Théorème I —*Si P est premier avec A, les (P—1) premiers multiples de A*

$$A, 2A, 3A \ldots\ldots (P-1)A \quad (1)$$

divisés par P donnent (P —1) restes différents.

Supposons que deux multiples de A, mA et $m'A$ choisis parmi les précédents (1) puissent donner des restes égaux à r, par exemple, on aura donc :

$$\left.\begin{array}{l} mA=PQ+r \\ m'A=PQ'+r \end{array}\right\} \text{ d'où } \begin{array}{l} r=mA-PQ \\ r=m'A-PQ' \end{array} \text{ et donc}$$

$mA-PQ=m'A-PQ'$ c. a. d.

$$A(m'-m)=P(Q'-Q) \quad \text{donc} \quad \frac{A(m'-m)}{P}=Q'-Q \quad (2)$$

Or P est premier avec A ; donc, d'après (2), il doit diviser $(m'-m)$ quantité plus petite que P, ce qui est impossible.

Corollaire.—Les restes $r, r' r'' r'''$.... étant différents et en nombre (P—1), sont donc les nombres consécutifs 1, 2, 3, 4....(P—1), mais dans un ordre qui peut être autre que l'ordre naturel.

353. Théorème II.—*Si P est premier avec A :*

1° *les P premières puissances* $A^0, A^1\ A^2 \ldots\ldots A^{P-1}$ *divisées par P donnent au moins deux restes égaux à 1*

2° *jusqu'à la moindre puissance de A, autre que* A^0, *ces restes sont différents*

3° *au delà, ils sont périodiques.*

1° Les restes de A^0, A^1, A^2,....A^{P-1} par P sont en nombre P et chacun étant plus petit que P, deux au moins sont égaux Si donc A^m et $A^{m'}$ sont ces deux puissances donnant des restes égaux r, on aura :

$$\left.\begin{array}{l} A^m=PQ+r \\ A^{m'}=PQ'+r \end{array}\right\} A^{m'}-A^m=P(Q'-Q)$$

$$A^m(A^{m'-m}-1)=P(Q'-Q)$$

$$\frac{A^m(A^{m'-m}-1)}{P}=Q'-Q$$

On voit donc que P divise le produit $A^m(A^{m'-m}-1)$ et, comme il est premier avec A^m il doit diviser $(A^{m'-m}-1)$, c'est-à-dire que la division de $A^{m'-m}$ par P donne pour reste 1.

2° Donc, on voit qu'avant d'arriver à A^P, il y a au moins une puissance $A^{m'-m}$ de A autre que A^0 qui donne pour reste 1.

Soit $m'-m=n$; alors la suite des puissances devient :

$A^0, A^1, A^2, A^3, \ldots A^n \ldots A^{P-1}$ et alors les restes de $A^0, A^1\ A^2 \ldots A^{n-1}$ par P sont différents, car si on pouvait supposer que deux puissances $A^{n'}$ et $A^{n''} < A^n$ de A divisées par P donneraient des restes égaux à r, on aurait :

$$\left.\begin{array}{l} A^{n'}=PQ+r \\ A^{n''}=PQ'+r \end{array}\right\} A^{n'}-A^{n'}=P(Q'-Q) \quad \text{et}$$

$$A^{n'}(A^{n''-n'}-1)=P(Q'-Q) \qquad \text{et alors}$$

$A^{n''-n'}$ divisé par P donnerait pour reste 1, ce qui est contre l'hypothèse.

3° Enfin si A^n divisé par P donne pour reste 1 on a :

$A^n=PQ+1$ et on en déduit :

$A^{n+1}=A^nA=(PQ+1)A=PQA+A$

$A^{n+2}=A^{n+1}A=(PQA+A)A=PQA^2+A^2$ et ainsi de suite

. . . . . .

$A^{2n}=A^{2n-1}\times A=PQA^n+A^n$ C'est-à-dire que les puissances $A^n, A^{n+1}, A^{n+2}, \ldots A^{2n-1}$ donnent, étant divisées par P les mêmes restes que les puissances $A^0\ A^1\ A^2 \ldots A^{n-1}$ divisées par le même nombre P.

354. Remarque.—Soit $A^m=PQ+r$ d'où

$A^{m+1}=PQA+Ar$ on en déduit *qu'un reste quelconque s'obtient en multipliant le précédent par A et en divisant le produit par P.*

355. *Application.*—Déterminer le reste du quotient entier de 4^{895} par 11.

Or les puissances $4^0\ 4^1\ 4^2\ 4^3\ 4^4\ 4^5$ donnent par leur division par 11 les restes successifs :

1 4 5 9 3 1

Donc les puissances de 11 qui sont de la forme

$4^{5x}, 4^{5x+1}, 4^{5x+2}, 4^{5x+3}, 4^{5x+4}$ admettent pour restes correspondants 1, 4, 5, 9, 3

Mais $4^{895}=4^{5\times 179+3}=4^{5x+3}$ Le reste correspondant est donc 9.

356. Théorème III.—*Si A ayant a, b, c pour facteurs premiers et si* $A = a^p b^q c^r$, *le nombre des nombres premiers avec A existant depuis 1 jusque A sera*

$$a^{p-1} b^{q-1} c^{r-1} (a-1)(b-1)(c-1)$$

En effet, les seuls multiples de a de 1 à A sont :

$$a, 2a, 3a, 4a \ldots . \text{ A ou } \frac{Aa}{a} \text{ en nombre } \frac{A}{a}$$

En les supprimant, il reste de 1 à A

$$A - \frac{A}{a} = A\left(1 - \frac{1}{a}\right) \text{ nombres premiers avec } a$$

De même pour b ; il existe $\frac{A}{b}\left(1 - \frac{1}{a}\right)$ multiples de b et en les supprimant, il reste de 1 à A

$$A\left(1 - \frac{1}{a}\right) - \frac{A}{b}\left(1 - \frac{1}{a}\right) = A\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right) \text{ nombres}$$

premiers avec a et b.

On trouvera de même qu'il reste :

$$A\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right) \text{ nombres premiers avec } a, b, c$$

ou $A\left(\frac{a-1}{a}\right)\left(\frac{b-1}{b}\right)\left(\frac{c-1}{c}\right)$ (1) Et en remplaçant A par sa valeur, il vient :

$$a^p b^q c^r \left(\frac{a-1}{a}\right)\left(\frac{b-1}{b}\right)\left(\frac{c-1}{c}\right) =$$

$$a^{p-1} b^{q-1} c^{r-1} (a-1)(b-1)(c-1) \quad (2)$$

357. *Exemple.*—Combien y a-t-il de nombres premiers avec 720 entre 1 et 720 ?

$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$. Il y aura donc d'après (1) ou (2)

$$720\left(\frac{2-1}{2}\right)\left(\frac{3-1}{3}\right)\left(\frac{5-1}{5}\right) = 192 \text{ nombres premiers avec } 720$$

II.—Caractères de divisibilité.

358. Théorème I.—*Dans tout système de numération, le reste de la division d'un nombre par un diviseur* d *quelconque de* B^m *(B étant la base) et le même que celui de la division par* d *de la tranche de* m *chiffres de droite.*

Soit N un nombre et appelons a, b, c, f... les valeurs absolues des tranches de m chiffres de droite à gauche :

$N = \ldots\ldots foba$ de sorte que :

$N = a + B^m b + B^{2m} c + B^{3m} f + \ldots.$ c. a. d.

$N = a + B^m(b + B^m c + B^{2m} f + \ldots.)$ (1)

Or la partie $B^m(b + B^m c + B^{2m} f + \ldots.)$ du 2e membre est un multiple de d, donc divisible par d.

Donc le reste de N par d est le même que celui de la partie non divisible par d.

359. Théorème II.—*Dans tout système de numération le reste de la division d'un nombre par un diviseur* d *quelconque de* $(B^m - 1)$ *(B etant la base) est le même que celui de la somme des tranches de* m *chiffres de droite à gauche, par le même diviseur* d.

Soit encore $N = a + B^m b + B^{2m} c + B^{3m} f + \ldots.$

Ajoutons et retranchons $a + b + c + \ldots.$ il vient :

$N = a + B^m b + B^{2m} c + B^{3m} f + \ldots a + b + c + f - a - b - c - \ldots$

(2) $N = [b(B^m - 1) + c(B^{2m} - 1) + f(B^{3m} - 1) + \ldots] + (a + b + c + f + \ldots.)$

Or d divisant $B^m - 1$, on en tire

$B^m = dQ + 1$ d'où $B^{2m} = (dQ + 1)B^m = dQB^m + B^m$

d'où $B^{2m} = dQB^m + dQ + 1$ où

$B^{2m} - 1 = dQB^m + dQ = d(QB^m + Q) = dQ'$ ce qui indique que $B^{2m} - 1$ est divisible par d et ainsi de suite. Donc la première partie du second membre de (2) est divisible par d ; donc le reste de N pas d est le même que celui de la partie non divisible par d, c'est-à-dire $(a + b + c + f \ldots.)$

360. Théorème III.—*Dans tout système de numération le reste de la division d'un nombre par un facteur* d *de* $B^m + 1$ *(B=base) est le même que celui par* d *de la somme des tranches de* m *chiffres de rang impair sur celle des tranches de* m *chiffres de rang pair, en commençant par la droite*

Soit encore $N = a + B^m b + B^{2m} c + B^{3m} f + \ldots.$

qu'on peut encore écrire comme dans le théorème II

$$(3)\quad N=[b(B^m+1)+c(B^{2m}-1)+f(B^{3m}+1)+\ldots]+(a-b+c-f+\ldots)$$

Or $B^m+1=dQ$ d'où $B^m=dQ-1$ et $B^{2m}=(dQ-1)B^m$

D'où $B^{2m}=B^m dQ-B^m=B^m dQ-dQ+1$ c. a. d.

$$B^{2m}-1=dQB^m-dQ=d(B^mQ-Q)=dQ'$$

qui montre bien que $(B^{2m}-1)$ est divisible par d.

De même $B^{3m}=B^{2m}B^m=(B^m dQ-dQ+1)B^m$

$$=B^{2m}dQ-B^m dQ+B^m=$$

$$=B^{2m}dQ-B^m dQ+dQ-1 \quad \text{d'où}$$

$B^{3m}+1=d(B^{2m}Q-B^mQ+Q)=dQ''$ qui montre que $B^{3m}+1$ est divisible par d et ainsi de suite.

Il s'ensuit que la 1ère partie du 2d membre de (3) est divisible par d, donc le reste de N par d est le même que celui de l'autre partie par d, c'est-à-dire de $(a-b+c-f\ldots)$

361. Théorème IV.—*Dans tout système de numération, un facteur* d *de (mB+1), B étant la base, est diviseur d'un nombre, lorsque l'excès du nombre d'unités du second ordre, sur le nombre formé par* m *fois la figure de droite, est multiple de* d.

Soit N un nombre et désignons par a le chiffre de droite et N' le nombre d'unités du second ordre ; on aura :

$$N=N'B+a \quad (1)$$

Ajoutons et retranchons (mBa) au 2e membre de (1), il vient :

$$N=N'B+a+mBa-mBa$$
$$N=B(N'-ma)+a(mB+1)$$

Or, $a(mB+1)$ est divisible par d par hypothèse, donc N sera divisible par d, si $(N'-ma)$ est divisible par d.

362. Théorème V.—*Dans tout système de numération, un facteur* d *de (mB—1), B étant la base, est diviseur d'un nombre, lorsque le nombre d'unités du second ordre augmenté de* m *fois le chiffre des unités, est multiple de* d.

Soit a le chiffre des unités et N' le nombre des unités du 2d ordre du nombre N. On aura.

$$N = N' \times B + a \quad \text{et comme précédemment}$$
$$N = B(N' + ma) - (mB - 1)a$$

Or d divise $(mB-1)a$; donc N sera divisible par d si $(N'+ma)$ est divisible par d

D.—Détermination des diviseurs simples et composés d'un nombre.

Leur nombre et leur somme.

363. Soit N un nombre dont on demande les diviseurs simples et composés.

Appelons a le moindre facteur premier de N (supposons que ce facteur y soit contenu n fois) et N' le dernier quotient ; on aura :

$$N = a^n \times N'$$

Soit b un autre facteur premier de N ; puisque b divise N et divise $a^n \times N'$ et, comme il est premier avec a, il divise N' ; et si N' contient p fois le facteur b, on peut écrire

$$N' = b^p \times N'' \quad \text{donc}$$
$$N = a^n b^p \times N''$$

De même, si c est un troisième facteur premier de N, il devra diviser N'' et supposons qu'on ait

$$N'' = c^q \times N''' \quad \text{on aura}$$
$$N = a^n b^p c^q \times N''' \quad \text{et enfin si } N''' = d^r$$

il vient : $N = a^n b^p c^q d^r$

On peut donc dire que a, b, c, d, sont les seuls facteurs premiers simples admis par N.

364. Formons les facteurs composés.

Considérant le facteur a, on peut dire que

$1, a, a^2, a^3 \ldots\ldots a^n$ sont des diviseur. de N en nombre $(n+1)$

De même $1, b, b^2, b^3, \ldots\ldots b^p$ sont des diviseurs de N en nombre $(p+1)$

Chacun de ces derniers multipliés par les $(n+1)$ facteurs précédents donne aussi des facteurs de N.

Les produits

$(1+a+a^2+a^3+\ldots\ldots a^n)(1+b+b^2+b^3+\ldots\ldots b^p)$ donne donc tous ces facteurs.

En multipliant les produits précédents par les facteurs $1, c, c^2, c^3, \ldots\ldots c^q$, chacun des termes du produit :

$(1+a+a^2+\ldots\ldots a^n)(1+b+b^2+\ldots\ldots b^p)(1+c+c^2+\ldots\ldots c^q)$

est un diviseur de N.

Enfin en considérant le dernier facteur d, chaque terme du produit :

$$(1)\quad (1+a+a^2+\ldots a^n)\,(1+b+b^2+\ldots b^p)\,(1+c+c^2+\ldots c^q)\,(1+d+d^2+\ldots d^r.)$$

sera diviseur simple ou composé de N.

Le nombre des facteurs de N est donc :

pour le facteur a, $(n+1)$ facteurs
" " b, $(p+1)$ "
" " c, $(q+1)$ "
" " d, $(r+1)$ " et le nombre total sera

$$(2)\qquad (n+1)(p+1)(q+1)(r+1)$$

Si on fait la somme des termes de chacun des facteurs de l'expression (1) [somme des termes d'une progression géométrique], on obtient :

$$(3)\qquad S=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}\times\frac{b^{p+1}-1}{b-1}\times\frac{c^{q+1}-1}{c-1}\times\frac{d^{r+1}-1}{d-1}$$

365. Exemple.—Déterminer les diviseurs simples et composés de 12600 et leur somme

$$12600=2^3\times3^2\times5^2\times7$$

D'après (2) le nombre des diviseurs est donc

$$(3+1)(2+1)(2+1)(1+1)=72$$

D'après (3) leur somme c

$$S=\frac{2^4-1}{2-1}\times\frac{3^3-1}{3-1}\times\frac{5^3-1}{5-1}\times\frac{7^2-1}{7-1}=48360.$$

E.—Des fractions périodiques.

366. Théorème I.—*Toute fraction ordinaire irréductible, dont le dénominateur D ne contient pas d'autres facteurs premiers que ceux de la base B est convertible en une expres-*

sion dont les chiffres, exprimant des unités de B en B fois plus petites, sont en nombre limité, et indiqué par le plus haut quotient entier **exact** *ou par* **excès** *des exposants des facteurs de D, divisés par les exposants des mêmes facteurs de la base B.*

Soit une fraction irréductible $\frac{N}{D}$ et supposons que la base B contienne les facteurs premiers b, c, d, un nombre tel que

$$B=b^n c^p d^q$$

Supposons aussi que le dénominateur D contienne les mêmes facteurs b, c, d en nombre tel que

$$D=b^{n'} c^{p'} d^{q'}$$

Soit r le plus haut quotient entier exact ou par excès de $\frac{n'}{n}, \frac{p'}{p}, \frac{q'}{q}$, de sorte que l'on ait $n' \leqq nr$; $p' \leqq pr$; $q' \leqq qr$. (1)

Alors en multipliant la fraction $\frac{N}{D}$ par une puissance r de la base, il vient :

$\frac{N+B^r}{D} = \frac{N+b^{nr}c^{pr}d^{qr}}{b^{n'}c^{p'}d^{q'}}$ Valeur entière, puisque le numérateur est multiple de D en vertu de (1). De plus B^r est la moindre puissance de B par laquelle il faut multiplier le facteur pour obtenir un quotient entier ; car, si en multipliant seulement par B^{r-1}, le numérateur de la nouvelle fraction contiendra *au moins* l'un des facteurs à une puissance dont l'exposant serait *au moins* inférieur de une unité à l'exposant du facteur analogue de D et le quotient ne serait pas entier.

Donc après r opérations successives, la division sera terminée et elle ne peut l'être avant.

367. Corollaire.—Toute fraction ordinaire *irréductible* du système décimal, dont le dénominateur ne contient pas de facteurs premiers différents de 2 et 5, donne lieu à une fraction décimale composée d'un système limité de chiffres et dont le nombre est le plus haut exposant de 2 et de 5 dans le dénominateur.

En effet, pour $B=b\times a=2\times 5=10$

$$n=p=1$$

et r devient égal à la plus haute valeur de n' et p', c'est-à-dire 1.

368. Théorème II.—*Toute fraction ordinaire irréductible dont le dénominateur D contient d'autres facteurs premiers que ceux de la base B, donne lieu à une expression dont les chiffres exprimant des unités de B en B fois plus petites sont en nombre illimité et sont de plus périodiques.*

Car, en multipliant le numérateur N par B, B^2, B^3...., on n'introduit pas dans N les facteurs étrangers à la base, qui existent au dénominateur ; et par suite le quotient de N par D ne sera jamais entier. Donc le nombre des chiffres est illimité.

De plus, le quotient est périodique ; car chaque reste devant être inférieur à D, on devra au plus tard à la $(D-1)^e$ division après la virgule, retrouver un reste déjà obtenu, lequel suivi d'un zéro, forme un quotient obtenu précédemment et ainsi de suite. Donc la suite est périodique.

Remarque.—Les fractions périodiques sont dites **simples** ou **mixtes** suivant que la période commence ou non au premier chiffre à droite de la virgule.

369. Théorème III.—*Toute fraction ordinaire irréductible dont le dénominateur ne contient aucun des facteurs de la base, donne lieu à une fraction périodique simple.*

Soit $\frac{N}{D}$ une fraction irréductible, D ne contenant aucun des facteurs de la base, et supposons que cette fraction ait donné naissance à une fraction périodique mixte.

$$0,x'y'z't'xyztuxyztu....$$

La théorie des fractions périodiques (159) nous dit que

$$\frac{N}{D}=\frac{x'y'z't'xyztu-x'y'z't'}{aaaaa0000}$$

a étant le plus haut chiffre significatif de la base B

$$a=B-1$$

Supposons que cette fraction réduite à sa plus simple expression donne une fraction $\frac{N'}{D'}$. On aura alors :

$$\frac{N}{D}=\frac{N'}{D'}$$

Or ces deux fractions sont irréductibles, donc il faut que $N=N'$ avec $D=D'$

Or $D=D'$ est impossible, puisque D' contient des facteurs n'entrant pas dans D,

Ainsi la fraction étant périodique, ne peut être que périodique simple.

370. Théorème IV.—*Toute fraction irréductible dont le dénominateur, outre les facteurs différents de ceux de la base, contient des diviseurs de la base, donne lieu à une fraction périodique mixte dont la partie non périodique est composée d'autant de chiffres qu'il y a d'unités dans le plus haut quotient entier ou par excès des exposants des facteurs de la base entrant dans le dénominateur, divisés par les exposants des mêmes facteurs de la base.*

Soit la base $B=b^n c^p d^q$ et soit $\frac{N}{D}$ la fraction contenant, dans le dénominateur D outre les facteurs b, c, d de la base d'autres facteurs représentés par D'

Alors $$\frac{N}{D}=\frac{N}{D'b^{n'}c^{p'}d^{q'}}$$

Soit r le plus grand quotient entier ou par excès des rapports $$\frac{n'}{n}, \frac{p'}{p}, \frac{q'}{q}$$

D'abord la fraction est périodique mixte, car si elle était simple, on pourrait avoir

$$\frac{N}{D}=\frac{xyztu}{aaaaa}=\frac{N'}{D''} \qquad [a=B-1]$$

Or $\frac{N}{D}$ et $\frac{N'}{D''}$ étant des fractions irréductibles, on doit avoir $N=N'$ avec $D=D''$

Or $D=D''$ est impossible, parce que D et D'' ne contiennent pas les mêmes facteurs premiers de la base.

Ensuite, si la partie non périodique ne se composait que de $(r-1)$ chiffres, on pourrait avoir

$$\frac{N}{D}=\frac{N'}{D'b^{n(r-1)}c^{p(r-1)}d^{q(r-1)}}$$

Alors, en réduisant cette fraction à ses moindres termes, son dénominateur renferme un des facteurs b, c, d de la base B à une puissance moindre que dans le dénominateur D de la fraction irréductible égale ; ce qui est impossible.

On verrait de même que la période ne peut commencer après $(r+1)$ chiffres ; donc, elle débute dès le $(r+1)^e$ chiffre

F. — Notes sur la racine carrée.

371. I. — Valeurs successives de $\sqrt{N}$.

Lorsque $\sqrt{N}$ est obtenue avec une première approximation, on peut se servir de ce premier résultat pour en obtenir un second, plus rapproché de $\sqrt{N}$; ce dernier résultat sert de base à un troisième et ainsi de suite.

En effet, soient a une valeur approchée par défaut de $\sqrt{N}$ et x sa partie complémentaire telle que $\sqrt{N}=a+x$

Alors $\qquad N=(a+x)^2=a^2+2ax+x^2$

et en prenant pour première valeur approximative

$$N=a^2+2ax \qquad \text{d'où}$$

$$x=\frac{N-a^2}{2a} \qquad \text{et alors par excès}$$

$$\sqrt{N}=a+x=a+\frac{N-a^2}{2a}=\frac{2a^2+N-a^2}{2a}=\frac{a^2+N}{2a}=\frac{1}{2}\left(a+\frac{N}{a}\right)=b.$$

Soit b le second résultat approché et x' la valeur complémentaire par excès, on aura donc :

$$\sqrt{N}=(b-x') \quad \text{ou} \quad N=b^2-2x'b+x'^2 \text{ et approximativement}$$

$$N=b^2-2bx' \qquad \text{donnant } x' \text{ par défaut}$$

$$x'=\frac{b^2-N}{2b} \qquad \text{et alors par excès}$$

$$\sqrt{N}=\left(b-\frac{b^2-N}{2b}\right)=\frac{2b^2-b^2+N}{2b}=\frac{b^2+N}{2b}=\frac{1}{2}\left(b+\frac{N}{b}\right)=c.$$

De même $\sqrt{N}=\frac{1}{2}\left(c+\frac{N}{c}\right)$ et ainsi de suite

372. Théorème.—*Si A et B ont un même nombre de chiffres et que plus de la moitié de leurs chiffres soient communs à partir de la gauche, on a :*

$$\sqrt{A}-\sqrt{B}<\frac{1}{2} \text{ et } \frac{A+B}{2}-\sqrt{AB}<\frac{1}{8}$$

1° En effet, le nombre de chiffres de la différence A—B étant par hypothèse moindre que la ½ du nombre des chiffres de B, on a :

$$A-B<\sqrt{B} \quad \text{ou} \quad \left(\sqrt{A}\right)^2-\left(\sqrt{B}\right)^2<\sqrt{B}$$

$$\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)<\sqrt{B} \text{ d'où}$$

$$\sqrt{A}-\sqrt{B}<\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$$

Or $\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{A}{B}}+\sqrt{\frac{B}{B}}}=\frac{1}{2}$ $\left[\frac{A}{B}\right.$ étant approximativement $=1$ $\left.\right]$

Il vient donc $\sqrt{A}-\sqrt{B}=<\frac{1}{2}$

2° De $\sqrt{A}-\sqrt{B}<\frac{1}{2}$, il vient en élevant au carré :

$A-2\sqrt{AB}+B<\frac{1}{4}$ ou

$A+B-2\sqrt{AB}<\frac{1}{4}$ et $\frac{A+B}{2}-\sqrt{AB}<\frac{1}{8}$

Ce théorème est dû à Mr J. Vieille, maître de conférences à l'Ecole Normale de France.

373. II.—Racine carrée par voie de division

Théorème.—*La moitié plus un du nombre des chiffres de la partie entière de $\sqrt{N}$ étant trouvés, on obtient les autres en divisant le reste total par le double de la valeur relative de la partie déterminée à la racine et l'erreur est moindre que deux.*

Supposons que $\sqrt{N}$ soit composée d'une partie entière de $(2n+1)$ chiffres ; en désignant par a la valeur absolue du nombre formé par les $(n+1)$ chiffres de gauche, par x la partie entière complémentaire de $\sqrt{N}$ et par R le reste ; on a :

$$N=(a\times10^n+x)^2+R=(a\times10^n)^2+2(a\times10^n)x+x^2+R$$

$$x=\frac{N-(a\times10^n)^2-x^2-R}{2(a\times10^n)}=\frac{N-(a\times10^n)^2}{2(a\times10^n)}-\left[\frac{x^2}{2(a\times10^n)}+\frac{R}{2(a\times10^n)}\right]$$

Appelons q le quotient de R' le reste de la division de $N-(a\times10^n)^2$ par $2(a\times10^n)$, il vient :

$$x=q+\frac{R'}{2(a\times10^n)}-\left[\frac{x^2}{2(a\times10^n)}+\frac{R}{2(a\times10^n)}\right]=$$

$$x=q-\left[\frac{R}{2(a\times10^n)}+\frac{x^2}{2(a\times10^n)}-\frac{R'}{2(a\times10^n)}\right]$$

Or R étant le reste de la $\sqrt{N}$, le maximum de R vaut $2(a\times10^n+x)$, car la différence entre les carrés de 2 nombres consécutifs vaut l'unité augmenté du double du plus petit nombre, donc le reste vaut au maximum cette valeur diminuée de 1, c'est-à-dire le double du plus petit nombre. Donc

$$x=q-\leqq\left[\frac{2(a\times10^n+x)}{2(a\times10^n)}+\frac{x^2}{2(a\times10^n)}-\frac{R'}{2(a\times10^n)}\right] \quad \text{ou}$$

$$x=q-\leqq\left[1+\frac{x}{(a\times10^n)}+\frac{x^2}{2(a\times10^n)}-\frac{R'}{2(a\times10^n)}\right]$$

Or $\sqrt{N}$ ayant $(2n+1)$ chiffres et a en ayant $(n+1)$, il s'ensuit que x a $2n+1-n-1=n$ chiffres. Donc x est plus petit que le plus petit nombre de $(n+1)$ chiffres c. a. d. $x<10^n$ et aussi pour cette raison $a\geqq10^n$ c. a. d. $(a\times10^n)\geqq10^{2n}$

Donc enfin :

$$x=q-<\left[1+\frac{10^n}{10^{2n}}+\frac{10^{2n}}{2\times10^{2n}}-\frac{R'}{2\times10^{2n}}\right] \quad \text{ou}$$

$$x=q-<\left[1+\left(\frac{1}{10^n}+\frac{1}{2}\right)-\frac{R'}{2\times10^{2n}}\right]$$

Mais $\frac{1}{10^n} < \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{10^n} - \frac{1}{2} < 0$ et ajoutant aux deux membres $\frac{2}{2}$ il vient

$$\frac{1}{10^n} + \frac{1}{2} < 1 \qquad \text{donc enfin}$$

$$x - q - < 2 \qquad \text{c. q. f. d.}$$

N. B. Les signes $(-<)$ et $(-\leq)$ s'énoncent :
" moins une quantité plus petite que „ et
" moins une quantité plus petite ou égale à „

374. Application.—Déterminer $\sqrt{3}$ avec 8 décimales

```
300 00 00 00 00 00 00 00 | 1,7320 (½+1 des chiffres de la √3)
200                      | 27 | 343 | 3462 | 3464
189
 1100
 1029
   7100
   6924
    17600
     176 00 00 00 00 00 | 3464 00 00 0
     173 20 00 00 0       5080 (4 chiffres de droite de √3).
       2 80 00 00 00 0
       2 77 12 00 00 0
Reste    2 88 00 00 00
```

Le reste étant $> \overline{5080}^2$ la racine est donc

$$\sqrt{3} = 1{,}73205080$$

par défaut, avec une erreur moindre que 1 unité décimale du 8e ordre.

G.—Notes sur la racine cubique.

I. Valeurs successives de $\sqrt[3]{N}$.

375. Il arrive souvent que l'approximation de $\sqrt[3]{N}$ n'est pas fixée, alors tout l'intérêt de la question se réduit à obtenir des valeurs de plus en plus rapprochées ; dans ce cas on peut opérer comme suit :

Soit a une valeur approchée de $\sqrt[3]{N}$ et soit $(a+x)$ la valeur complète demandée. On a alors

$N=(a+x)^3=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$ ou, comme première approximation x^2 et x^3 étant très petits :

$$N=a^3+3a^2x \qquad \text{d'où} \qquad x=\frac{N-a^3}{3a^2} \qquad \text{et alors}$$

$$\sqrt[3]{N}=a+x=a+\frac{N-a^3}{3a^2}=\frac{3a^3+N-a^3}{3a^2}=\frac{2a^3+N}{3a^2}=\frac{2}{3}\left(a+\frac{N}{2a^2}\right)=b$$

Cette quantité est une valeur approchée de $\sqrt[3]{N}$ par excès, et l'on peut poser $\sqrt[3]{N}=b-y$ et alors

$N=(b-y)^3=b^3-3b^2y+3by^2-y^3$; et y^2 et y^3 peuvent être négligés comme très petits, on a pour 2de approximation

$$N=b^3-3b^2y \qquad \text{d'où} \qquad y=\frac{b^3-N}{3b^2} \qquad \text{et enfin}$$

$$\sqrt[3]{N}=b-y=b-\frac{b^3-N}{3b^2}=\frac{3b^3-b^3+N}{3b^2}=\frac{2b^3+N}{3b^2}=\frac{2}{3}\left(b+\frac{N}{2b^2}\right)=c.$$

valeur par défaut et ainsi de suite.

Cette méthode a, sur celle analogue pour la racine carrée, l'avantage de donner des résultats alternativement par excès et par défaut, c'est-à-dire de fixer l'approximation ; car, si deux valeurs successives ne diffèrent, par exemple, qu'à partir de la 8e décimale, on serait en droit d'affirmer que les 7 premières décimales sont exactes.

N. B. Ce procédé, et celui analogue pour la racine carrée, sont dûs à Mr Bertrand de l'Institut de France.

II.—Racine cubique par voie de division.

378. Théorème.—*La moitié plus un, du nombre des chiffres de la partie entière de $\sqrt[3]{N}$ étant trouvés, on obtient les suivants en divisant le reste total par le triple carré de la valeur relative de la partie déjà déterminée à la racine et l'erreur est moindre que* **trois**.

Supposons que $\sqrt[3]{N}$ soit composée, à sa partie entière, de $(2n+1)$ chiffres ; en désignant par a la valeur absolue du nombre formé par les $(n+1)$ figures de gauche et par x le nombre complémentaire de $\sqrt[3]{N}$ on a, R étant le reste :

$$N=(a.10^n+x)^3+R=(a.10^n)^3+3(a.10^n)^2x+3(a.10^n)x^2+x^3+R$$

d'où

$$x=\frac{N-(a\times10^n)^3}{3(a\times10^n)^2}-\left[\frac{x^2}{a\times10^n}+\frac{x^3}{3(a\times10^n)^2}+\frac{R}{3(a\times10^n)^2}\right]$$

Appelons q le quotient entier de $[N-(a\times10^n)^3]$ par $3(a\times10^n)^2$ et R' le reste, il vient :

$$x=q-\left[\frac{R}{3(a\times10^n)^2}+\frac{x^2}{a\times10^n}+\frac{x^3}{3(a\times10^n)^2}-\frac{R'}{3(a\times10^n)^2}\right]$$

Or la différence entre les cubes de deux nombres consécutifs valant le triple carré du plus petit des nombres, plus le triple de celui-ci, plus un ; il s'ensuit que le maximum de R vaut

$$3(a\times10^n+x)^2+3(a\times10^n+x) \quad \text{et alors :}$$

$$x=q-\leqq\begin{cases}\dfrac{3(a\times10^n+x)^2+3(a\times10^n+x)}{3(a\times10^n)^2}\\ +\dfrac{x^2}{a\times10^n}+\dfrac{x^3}{3(a\times10^n)^2}-\dfrac{R'}{3(a\times10^n)^2}\end{cases}\quad\text{ou}$$

$$x=q-\leqq\begin{cases}\dfrac{(a\times10^n)^2+2(a\times10^n)x+x^2+a\times10^n+x}{(a\times10^n)^2}\\ +\dfrac{x^2}{a\times10^n}+\dfrac{x^3}{3(a\times10^n)^2}-\dfrac{R'}{3(a\times10^n)^2}\end{cases}$$

$$x=q-\leqq\begin{cases}1+\dfrac{2x}{a\times10^n}+\dfrac{x^2}{(a\times10^n)^2}+\dfrac{1}{(a\times10^n)}+\dfrac{x}{(a\times10^n)^2}\\ +\dfrac{x^2}{a\times10^n}+\dfrac{x^3}{3(a\times10^n)^2}-\dfrac{R'}{3(a\times10^n)^2}\end{cases}$$

Or $\sqrt[3]{N}$ ayant $(2n+1)$ chiffres et a en ayant $(n+1)$, il s'ensuit que x a $(2n+1-n-1)=n$ chiffres ; donc x est plus petit que le plus petit nombre de $(n+1)$ chiffres c. a. d. $x<10^n$; a a $(n+1)$ chiffres, donc $a \geqq 10^n$; donc aussi $a\times10^n \geqq 10^{2n}$

Il vient alors :

$$x=q-<\begin{cases}1+\dfrac{2\times10^n}{10^{2n}}+\dfrac{10^{2n}}{10^{4n}}+\dfrac{1}{10^{2n}}+\dfrac{10^n}{10^{4n}}\\ +\dfrac{10^{2n}}{10^{2n}}+\dfrac{10^{2n}}{3\times10^{4n}}-\dfrac{R'}{3\times10^{4n}}\end{cases}\quad \text{ou}$$

$$x=q-<\left(2+\frac{2}{10^n}+\frac{2}{10^{2n}}+\frac{1}{10^{2n}}+\frac{1}{3\times10^n}-\frac{R'}{3\times10^{4n}}\right)$$

Mais pour $n=1$ on a : $\dfrac{2}{10}+\dfrac{2}{10^2}+\dfrac{1}{10^2}+\dfrac{1}{3\times10}<1$

et à plus forte raison

$$\frac{2}{10^n}+\frac{2}{10^{2n}}+\frac{1}{10^{2n}}+\frac{1}{3\times10^n}<1 \text{ et par suite}$$

$$x=q-<3$$

377. Application. — Déterminer $\sqrt[3]{5}$ avec 4 décimales.

5 000 000 000 000	170 ($\frac{1}{2}$+1 des chiffres de la racine)		
1			
4 000	$3\times1^2=$ 300	86700	$3a^2$
3 913	210		$3ab$
	49		b^2
87 000	559		
87 000	7		
87 000 000 000	867 000 000		
86 700 000 0			
300 000 000			

100. Trop fort, car on ne peut obtenir que deux chiffres.

Donc $\sqrt[3]{5}=1,7099$ à moins de 0,0001.

N. B. Cette démonstration, comme la démonstration analogue pour la racine carrée est dûe à Mr Léon Lecointe, professeur de Mathématiques à Bruxelles.

H. Sur les progressions.

378. Série géométrique particulière.

Déterminer la somme des produits que l'on obtient en multipliant terme à terme une progression par différence et une progression par quotient.

Soient les deux progressions ayant n termes.

$$+ \quad a. \quad b. \quad c \ldots . i. \quad t. \quad l.$$
$$\div \quad A : B : C : \ldots . I : T : L :$$

Faisant le produit terme à terme et faisant la somme des produits, on a :

$$P = Aa + Bb + Cc + \ldots . Ii + Tt + Ll$$

Or $B = Aq$, $C = Aq^2 \ldots . T = Aq^{n-2}$, $L = Aq^{n-1}$

et substituant, il vient :

$$P = Aa + bAq + cAq^2 \ldots . tAq^{n-2} + lAq^{n-1} \quad (1)$$

et multipliant par q l'égalité (1) on a :

$$Pq = Aaq + bAq^2 + cAq^3 \ldots . tAq^{n-1} + lAq^n \quad (2)$$

Retranchant (2) de (1), il vient :

$$P(1-q) = Aa + (b-a)Aq + (c-b)Aq^2 + \ldots (l-t)Aq^{n-1} - lAq^n$$

Or $(b-a) = (c-b) \ldots . (l-k) = r$ d'où

$$P(1-q) = Aa + rAq + rAq^2 + \ldots . rAq^{n-1} - lAq^n$$

$$P(1-q) = A(a - lq^n) + rAq(1 + q + q^2 \ldots . q^{n-2})$$

Or la somme $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots . q^{n-2} = \frac{q^{n-1}-1}{q-1}$ d'où

$$P(1-q) = A(a - lq^n) + rAq\frac{q^{n-1}-1}{q-1}$$ et enfin

$$P = A\left[\frac{lq^n - a}{q-1} - \frac{rq(q^{n-1}-1)}{(q-1)^2}\right]$$

K.—Sur les logarithmes.

379. I.—*La différence entre les logarithmes de deux nombres est d'autant plus petite que ces nombres sont plus grands et diffèrent moins entre eux.*

Soient N et (N+d) deux nombres; on aura :

$N+d=N1+\left(\frac{d}{N}\right)$ et prenant le logarithme des deux membres, il vient :

$$\log (N+d)=\log \left[N\left(1+\frac{d}{N}\right)\right]=\log N+\log \left(1+\frac{d}{N}\right)$$

D'où

$$\log (N+d)-\log N=\log \left(1+\frac{d}{N}\right)$$

Or la différence $\log \left(1+\frac{d}{N}\right)$ se rapproche d'autant plus de log 1 ou de zéro que $\frac{d}{N}$ est plus petit, c. a. d. que d est petit et que N est grand.

380. II. - *Il est nécessaire que les progressions génératrices d'un système de logarithmes contiennent respectivement les termes* **un** *et* **zéro** *et que ces termes se correspondent.*

En effet, supposons que ces termes soient remplacés par k et k' par exemple.

Supposons qu'un produit ab corresponde à un multiple kc la progression géométrique et que $kc=ab$ (1) d'où $c=\frac{ab}{k}$

D'autre part, prenant le logarithme de (1) il vient :

$$\log k+\log c=\log a+\log b$$

Mais $\log k=k'$ par hypothèse, alors

$$k'+\log c=\log a+\log b \quad \text{et}$$

$$\log c=\log a+\log b-k'$$

et remplaçant c par sa valeur $\frac{ab}{k}$, il vient :

$$\log\left(\frac{ab}{k}\right)=\log a+\log b-k' \quad \text{d'où}$$

$$\frac{ab}{k}=N \text{ et } ab = k\,N$$

Donc pour déterminer un produit (ab), il faudrait faire une addition ($\log a+\log b$), une soustraction ($\log a+\log b$)$-k'$ et une multiplication, celle de k par le nombre naturel corres-

pondant au résultat logarithmique ($\log a + \log b - k'$), c'est-à-dire qu'un tel système de nombres artificiels compliquerait les opérations au lieu de les simplifier.

Les hypothèses $k=1$ et $k'=0$ font disparaître cette complication.

381. III. Problème.—Déterminer le nombre n des termes de la progression.

$$+1 : \frac{3}{4} : \left(\frac{3}{4}\right)^2 : \left(\frac{3}{4}\right)^3 : \cdots$$

pour que la somme soit 4 à 0,001

La somme des n termes donne :

$$S=\frac{a-lq}{1-q}=\frac{a-aq^{n-1}\times q}{1-q}=\frac{a-aq^n}{1-q}=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}$$

Donc (1) $\frac{a}{1-q}=4$ et

(2) $\frac{aq^n}{1-q}=0{,}001$ $\Big\}$:

(1) donne : $\begin{cases} a=1 \\ q=\frac{3}{4} \end{cases}$ et substituant dans (2)

il vient :

$$\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}}=0{,}001 \quad \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1}{4}}=0{,}001 \quad \left(\frac{3}{4}\right)^n=0{,}00025$$

ou $\left(\frac{4}{3}\right)^n=4000$

Prenant le log. des deux membres, il vient :

$$n(\log 4-\log 3)=\log 4000 \qquad \text{d'où}$$

$$n=\frac{\log 4000}{\log 4-\log 3}=21 \text{ termes par excès.}$$

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I.

PAGE

§ 1.—*Numération des nombres entiers* 5
§ 2.—*Calcul des nombres entiers.*—Définitions 9
A.—Addition 9
B.—Soustraction 11
C.—Multiplication 12
D.—Division 15
Quotient de deux nombres avec une approximation donnée 20

CHAPITRE II.

§ 1.—*Divisibilité des nombres* 23
§ 2.—*Plus grand commun diviseur* 31
§ 3.—*Plus petit commun multiple* 37
Recherche du plus grand commun diviseur à l'aide du plus petit commun multiple 38

CHAPITRE III.—Des fractions.

§ 1.—*Fractions ordinaires* .....
A.—Numération des fractions ordinaires 39
Réduction au même dénominateur 42
Simplification des fractions 43
B.—Calcul des fractions ordinaires 45
§ 2.—*Fractions décimales* .....
A.—Numération des fractions décimales 49
B.—Calcul des fractions décimales 50

CHAPITRE III—(*Suite*) PAGE

§ 3.—Conversion des fractions ordinaires en fractions décimales 53
Fractions décimales périodiques 53
§ 4.—Conversion des fractions décimales en fractions ordinaires 55
§ 5.—*Fractions continues* 57

CHAPITRE IV.

§ 1.—Puissances et racines des nombres 61
§ 2.—Du carré et de la racine carrée 62
§ 3.—Lois des nombres non carrés parfaits 65
§ 4.—Racine carrée par approximation 67
§ 5.—Du cube et de la racine cubique 69
§ 6.—Racine cubique par approximation 73

CHAPITRE V.—Systèmes de poids et mesures.

§ 1.—*Système métrique* 75
A.—Mesures de longueur 76
B.—Mesures de surface 76
C.—Mesures de volume 77
D.—Mesures de capacité 78
E.—Mesures de poids 78
F.—Monnaies décimales 79
§ 2.—*Mesures de temps* 81
§ 3.—*Mesures circulaires* 81
§ 4.—*Mesures anciennes* .....
A.—Mesures de longueur 83
B.—Mesures de surface 84
C.—Mesures de volume 84
D.—Mesures de capacité 84
E.—Mesures de poids 85
F.—Mesures d'arpenteurs 86

CHAPITRE VI.—Rapports et proportions.

§ 1.—*Définitions* 87
§ 2.—*Propriétés des proportions* 88
Des moyennes 91
§ 3.—*Applications des proportions* 92
A.—Règles de trois 93
B.—Règles de mélange 93
C.—Règle d'alliage 95
D.—Partage proportionnel 96
E.—Règles de société 97

CHAPITRE VII.—Progressions et logarithmes.

§ 1.—*Des progressions* 99
A.—Progressions arithmétiques 99
B.—Progressions géométriques 103
§ 2.—*Des logarithmes* .....
A.—Définitions et considérations générales 107
B.—Propriétés des logarithmes 109
Compléments arithmétiques 111
Module 112

CHAPITRE VIII.—Questions d'intérêt

§ 1.—*Des intérêts* 115
A.—Intérêts simples 115
B.—Intérêts composés 118
§ 2.—*Annuités* 122
§ 3.—*Epoque moyenne* 126
§ 4.—*Escompte* 127

CHAPITRE IX.—Compléments d'arithmétique.

A.—Opérations sur les nombres entiers 131
B.—Théorie des systèmes de numération 132
C.—1° Nombres premiers 139
2° Caractères de divisibilité 142

CHAPITRE IX—(*Suite*) PAGE

D.—Détermination des diviseurs simples et composés d'un nombre.....
Leur nombre et leur somme..... 145
E.—Des fractions périodiques..... 146
F.—Notes sur la racine carrée.....
1° Valeurs successives de $\sqrt{N}$..... 150
2° Racine carrée par voie de division..... 151
C.—Notes sur la racine cubique.....
1° Valeurs successives de $\sqrt[3]{N}$..... 154
2° Racine cubique par voie de division..... 155
H.—Progressions..... 157
K.—Logarithmes..... 157

ERRATA

L'indication 14ᵉ signifie la 14ᵉ ligne en remontant.

Page	ligne	au lieu de	lire
7	14ᵉ	dix-neuf.....neuf	vingt-dix-neuf....neuf
12	Soustraction:	1° 536 ; 2° 133	1° 586 ; 2° 138
13	11ᵉ	18 centaines	28 centaines
14	15	736	73×6
	2° et 1°	$(a\times b\times c)$	$(a+b+c)$
15	12ᵉ	( )	(80)
19	8ᵉ	multiplié par	multiplié ou divisé par
20	1	multiplié par	multiplié ou divisé par
22	4ᵉ	564	566
26	10	$c(10^m+1)$	$(10^{2m}-1)$
	7ᵉ	par (10^m+1)	par (10^m-1)
30	16	10000 (au centre)	70000
	7ᵉ	100000	1000000
	2ᵉ	643	645
32	8	BQ'	RQ'
	9	divisant B	divisant R
	entre 11 et 12	intercaler	Donc le p. g. c. d. ne peut être plus grand que R''
33	5ᵉ	R_n	B
	13ᵉ	Q_n	Q_{n+1}
41	12ᵉ	petite	grande
43	18	(à droite) $3^2\times5$	$3^2\times7$
	14ᵉ	$9\times13\times3^2\times7$	$9\times3^2\times7$
	16ᵉ	250	350
47	7ᵉ	3 fois	5 fois
	5ᵉ	$\frac{2\times5}{3\times9}$	$\frac{2\times5}{3\times8}$
55	10	le facteur...	le plus grand facteur
63	3ᵉ, 4ᵉ, 6ᵉ	$\leqq$	$<$
95	5ᵉ	650	950
109	1	§ 269	§ 298
124	4ᵉ	$\frac{(1+r)n-1}{r}$	$\frac{(1+r)^n-1}{r}$
158	2	$N+d=N1+\left(\frac{d}{N}\right)$	$N+d=N\left(1+\frac{d}{N}\right)$